Necessity-measures and their Möbius inverses in the framework of generalized coherent previsions

12. Januar 2012

Definitionen

Definition

- *Gegeben: Grundraum Ω, der „Raum aller Möglichkeiten“ (im Folgenden immer endlich).*
- *Ein **Spiel** X ist eine **beschränkte** Abbildung von Ω in die reellen Zahlen.*
- *Ein $\omega \in \Omega$ beschreibt den möglichen „Zustand der Welt“.*
- *$X(\omega)$ beschreibt den in diesem Fall gemachten Gewinn des Spiels X (in einer bestimmten Währung).*
- *Die Menge aller Spiele über Ω sei mit $\mathscr{L}(\Omega)$ bezeichnet.*

Definition

- *Teilmengen $A \subseteq \Omega$ identifizieren wir mit ihrer charakteristischen Funktion*

$$\mathbb{1}_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \textit{falls } \omega \in A \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases},$$

  und betrachten sie so als $\{0,1\}$-wertige Spiele. Es gilt also : $2^\Omega \subseteq \mathscr{L}(\Omega)$.

In naheliegender Wiese werden für $X, Y \in \mathscr{L}(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert:

- $X + Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto X(\omega) + Y(\omega)$
- $\lambda \cdot X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \lambda \cdot X(\omega)$
- $X \leq Y : \Longleftrightarrow \forall \omega \in \Omega : X(\omega) \leq Y(\omega)$
- $X \wedge Y : \mathscr{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \min\{X(\omega), Y(\omega)\}$

Definition

*Eine **lower prevision** ist eine Abbildung von einer Menge $\mathscr{K}$ von Spielen (über dem gleichen Grundraum Ω) in die reellen Zahlen:*

$$\underline{P} : \mathscr{K} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Für ein Spiel X beschreibt $\underline{P}(X)$ den „maximalen Kaufpreis" des Spiels: Der Spieler ist geneigt, jeden Preis (echt) kleiner als $\underline{P}(X)$ für das Spiel X zu zahlen.

Definition

Eine lower prevision $\underline{P} : \mathscr{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* ***kohärent****, falls gilt:*

(P1): $\forall X \in \mathscr{L}(\Omega) : \quad \underline{P}(X) \geq \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega),$

(P2): $\forall X \in \mathscr{L}(\Omega), \; \forall \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \quad \underline{P}(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot \underline{P}(X)$

(P3): $\forall X, Y \in \mathscr{L}(\Omega) : \quad \underline{P}(X) + \underline{P}(Y) \leq \underline{P}(X + Y)$

Definition

Die Strukter $\mathcal{M}(\underline{P})$ einer lower prevision $\underline{P}$ ist die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße, die $\underline{P}$ auf ihrem Definitionsbereich dominieren:

$$\mathcal{M}(\underline{P}) := \{p \in \mathscr{P}(\Omega) | \forall X \in \mathrm{dom}(X) : p(X) \geq \underline{P}(X)\}$$

Satz

Die Struktur einer kohärenten lower prevision ist ein schwach--kompaktes konvexes Polytop*

Satz (Lower-Envelope-Theorem)

Eine lower prevision $\underline{P}$ ist genau dann kohärent, wenn sie untere Einhüllende ihrer Struktur ist:

$$\underline{P} \text{ kohärent} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall X \in \mathrm{dom}(\underline{P}) : \underline{P}(X) = \inf_{p \in \mathcal{M}(\underline{P})} p(X)$$

In diesem Fall gilt dann insbesondere:

$$\inf_{p \in \mathcal{M}(\underline{P})} p(X) = \inf_{p \in \mathrm{ext}(\mathcal{M}(\underline{P}))} p(X)$$

$\Longrightarrow$ *allgemeines Verallgemeinerungsparadigma für Konstruktionen mit lower previsions*

Definition

Die natürliche Extension einer lower prevision $\underline{P}$ *ist die kleinste kohärente previson* $\underline{P}^{\diamond} : \mathscr{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, *die* $\underline{P}$ *auf ihrem Definitionsbereich dominiert, d.h.:*

$$\forall X \in \mathrm{dom}(\underline{P}) : \underline{P}^{\diamond}(X) \geq \underline{P}(X).$$

Satz

Ist die Struktur einer lower prevision $\underline{P}$ *nichtleer, so existiert die natürliche Extension* $\underline{P}^{\diamond}$*:*

$$\underline{P}^{\diamond}(X) = \inf_{p \in \mathcal{M}(\underline{P})} p(X)$$

verallgemeinerte lower previsions

- Motivation: Verallgemeinerung Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
- klassisch z.B. parametrisches Modell:

$$M = \{P_\theta | \theta \in \Theta\}$$

mit $P_\theta \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ und $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$.
Seien alle bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_\theta(A) = P(A|\theta)$ und eine priori-Verteilung $P(\theta = \theta_i)$ des Paramters θ bekannt.
Dann ergibt sich Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \subseteq \Omega$ zu:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(\{\theta_i\}) \cdot P(A|\theta_i)$$

- Da additive Wahrscheinlichkeit durch Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse gegeben ist, reicht es, diese zu betrachten:

$$P(\{\omega_j\}) = \sum_{i=1}^{m} P(\{\theta_i\}) \cdot P(\{\omega_j\}|\theta_i)$$

- oder kompakt als Matrixmultiplikation:

$$R = Q \circ P$$

mit:

$$\begin{aligned} (R_j) \in \mathbb{R}^{1\times n} \quad &\ldots \quad \text{totale Wahrscheinlichkeiten } P(\{\omega_j\}) \\ (P_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad &\ldots \quad \text{bedingte Wahrscheinlichkeiten } P(\{\omega_j\}|\theta_i) \\ (Q_i) \in \mathbb{R}^{1\times m} \quad &\ldots \quad \text{Wahrscheinlichkeiten } P(\{\theta_i\}) \text{ für Parameter } \theta_i \end{aligned}$$

- Wahrscheinlichkeiten P und Q setzen sich via Matrixmultiplikation zu totaler Wahrscheinlichkeit R zusammen.
- Dies lässt sich im Falle kohärenter lower previsions nicht so einfach darstellen, aber:

$$\text{Matrix} \quad \triangleq \quad \underline{\text{lineare}}\ \text{Abbildung}$$

$$\text{Matrixmultiplikation} \quad \triangleq \quad \text{Komposition von Abbildungen}$$

$\Longrightarrow$ ersetze lineare Abbildungen durch (bestimmte) nichtlineare Abbildungen

$\Longrightarrow$ verallgemeinerte lower previsions:

Definition

Eine verallgemeinerte lower prevision ist eine Abbildung

$$\underline{P} : \mathscr{L}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{L}(\Omega').$$

Ist für jedes $\omega' \in \Omega'$ die Abbildung

$$\underline{P}_{\omega'} : \mathscr{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : X \mapsto (\underline{P}(X))(\omega'),$$

aufgefasst als gewöhnliche lower prevision, kohärent, so heißt $\underline{P}$ kohärent.

Für $\Omega' := \Theta$ beschreibt die Kompostion $\underline{R} := \underline{Q} \circ \underline{P}$ mit

$$\underline{P}: \qquad \mathscr{L}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{L}(\Theta) : X \mapsto \underline{P}(X) : \Theta \longrightarrow \mathbb{R} : \theta \mapsto \underline{P}_{\theta}(X)$$

und

$$\underline{Q}: \qquad \mathscr{L}(\Theta) \longrightarrow \mathbb{R} \; (= \mathscr{L}(\{1\})) \;\; : Y \mapsto \underline{Q}(Y)$$

die sich ergebende “totale untere Erwartung “ von Spielen $X \in \mathscr{L}(\Omega)$.

Interpretation:

- Für $\theta \in \Theta$ beschreibt $(\underline{P}(X))(\theta)$ den Kaufpreis des Spieles X, falls θ der wahre Parameter des Modells ist.
- Wenn man das Spiel X spielt, hätte es also, je nach θ, den "Wert " $(\underline{P}(X))(\theta)$, man spielt also gewissermaßen das Spiel

$$Y \in \mathscr{L}(\theta) : \theta \mapsto (\underline{P}(X))(\theta)$$

und dieses Spiel hat wiederum den Wert

$$\underline{Q}(Y) = \underline{Q}(\underline{P}(X)) = \underline{R}(X).$$

Satz

Die Komposition von kohärenten (verallgemeinerten) lower previsions ist wieder kohärent. In diesem Sinne bilden kohärente previsions einen „abgeschlossenen" Begriff von (verallgemeinerter) „Wahrscheinlichkeit".

Dies gilt auch für klassische Wahrscheinlichkeitsmaße:

Satz

Die Komposition von linearen kohärenten previsions ist wieder eine lineare, kohärente prevision.

Die klassischen Wahrscheinlichkeitsmaße sind in diesem Sinne also ein „Unterbegriff" der kohärenten lower previsions.

Frage: gibt es weitere abgeschlossene Unterklassen von kohärenten previsions?

Zunächst: folgende Klassen sind es nicht:

- Belief-Funktionen
- supermodulare untere Wahrscheinlichkeiten
- natürliche Extensionen von kohärenten lower probabilities
- quasi additive Wahrscheinlichkeitsmaße

Idee: Beweisidee der Abgeschlossenheit von linearen previsions:

$$\begin{aligned}(\underline{Q} \circ \underline{P})(X+Y) &= \underline{Q}(\underline{P}(X+Y)) = \underline{Q}(\underline{P}(X) + \underline{P}(Y)) \\ &= \underline{Q}(\underline{P}(X)) + \underline{Q}(\underline{P}(Y)) \\ &= (\underline{Q} \circ \underline{P})(X) + (\underline{Q} \circ \underline{P})(X)\end{aligned}$$

übertragbar auf beliebige binäre Operation $\oplus$, bezüglich derer $\underline{P}$ und $\underline{Q}$ strukturverträglich sind.

- naheliegende Operation: Schnitt $\cap$ bzw. Infimum $\wedge$:
  $\Longrightarrow$ Necessity-Maße (fast).

Definition (Necessity-Maß)

Eine Abbildung $N : 2^{\Omega} \longrightarrow [0,1]$ *mit:*

$$\begin{aligned} N(\emptyset) &= 0 \\ N(\Omega) &= 1 \\ \forall X, Y \in 2^{\Omega} &: \quad N(X \cap Y) = min\{N(X), N(Y)\} \end{aligned}$$

heißt (gewöhnliches) Necessity-Maß.

Zur Charakterisierung von Necessity-Maßen ist Möbiusinverse hilfreich. Dazu kurzer Ausflug in Dempster-Shafer-Theorie

Dempster-Shafer-Theorie und totale Monotonie

- *klassischer Fall (Ω endlich):*
  $P : 2^\Omega \longrightarrow \mathbb{R} : X \mapsto P(X) = \sum_{\omega \in X} P(\{\omega\}) = \sum_{Y \subseteq X, |Y|=1} P(Y)$
- *Belief-Funktion:*
  $\underline{P} : 2^\Omega \longrightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$
- *mit „Massenfunktion" $m : 2^\Omega \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$*
- $m(\emptyset) = 0$
- $\sum_{Y \in 2^\Omega} m(Y) = 1.$

Die sogenannte Möbiusinversion vermittelt eine $1-1$ *Korrespondenz zwischen m und* $\underline{P}$*. Die Abbildung m wird als Möbiusinverse zu* $\underline{P}$ *bezeichnet.*

totale Monotonie

Aus klassischer Wahrscheinlichkeitstheorie bekannt:

- *Siebformel von Poincaré - Sylvester:*

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} X_i) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|T|+1} P(\bigcap_{i \in T} X_i)$$

für beliebige $X_1, \ldots, X_k \in 2^{\Omega}$. *Verallgemeinerung und Abschwächung dieser Gleichung:*

Definition

Sei $(V, \leq)$ *ein Verband und* $\underline{P} : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Abbildung.*

Dann heißt $\underline{P}$ *k-monoton, falls für beliebige* $X_1, \ldots, X_k \in V$ *die Ungleichung*

$$\underline{P}\Big(\bigvee_{i=1}^{k} X_i\Big) \geq \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|T|+1}\, \underline{P}\Big(\bigwedge_{i \in T} X_i\Big)$$

gilt.

$\underline{P}$ *heißt total monoton, falls* $\underline{P}$ *k-monoton für alle* $k \geq 2$ *ist.*

Satz

Eine monotone Abbildung $\underline{P} : 2^{\Omega} \longrightarrow [0,1]$ *mit*

$$\begin{aligned} \underline{P}(\emptyset) &= 0 \textit{ und} \\ \underline{P}(\Omega) &= 1 \end{aligned}$$

ist genau dann total monoton, wenn Ihre Möbiusinverse nichtnegativ ist.

Daraus folgt, dass Necessity-Maße eine nichtnegative Möbiusinverse haben:
Es gilt:

$$\bigvee_{i=1}^{k} X_i = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|T|+1} \bigwedge_{i \in T} X_i$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
N(\bigvee_{i=1}^{k} X_i) &\geq \bigvee_{i=1}^{k} N(X_i) \\
&= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|T|+1} \bigwedge_{i \in T} N(X_i) \\
&= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|T|+1} N(\bigwedge_{i \in T} X_i)
\end{aligned}
$$

und somit ist N total monoton, besitzt also nichtnegative Möbiusinverse.

Möbiusinverse von Necessity-Maßen

Satz

Die fokalen Elemente X (mit $m(X) \neq 0$) eines Necessity-Maßes bilden eine Kette (sind also paarweise ineinander enthalten).

Beweis

Seien X und Y zwei fokale Elemente mit $X \cap Y \subsetneq X$ und $X \cap Y \subsetneq Y$. Dann gilt wegen der Nichtnegativität der Möbiusinversen:

$$\begin{aligned} N(X) &= \sum_{Z \subseteq X} m(Z) \\ &= \sum_{Z \subseteq X \cap Y} m(Z) + \sum_{Z \subseteq X \& Z \nsubseteq X \cap Y} m(Z) \\ &> \sum_{Z \subseteq X \cap Y} m(Z) \\ &= N(X \cap Y) \end{aligned}$$

Beweis

und analog:

$$N(Y) \quad > \quad N(X \cap Y),$$

woraus

$$min\{N(X), N(Y)\} > N(X \cap Y)$$

folgt.

Da Necessity-Maße für gewöhnlich nur auf 2^Ω betrachtet werden, müssen für die Komposition von (verallgemeinerten) Necessity-Maßen diese geeignet auf $\mathscr{L}(\Omega)$ erweitert werden, z.B. mit natürllicher Extension. Konkret kann dies durch Berechnung der Strukturecken $\operatorname{ext}\mathcal{M}(N)$ geschehen. In diesem Fall könnte man auch das Choquet-Integral berechnen, was hier mit der natürlichen Extension übereinstimmt, aber z.B. für die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\underline{P}(\{\theta_i\}|\omega_j)$ geht dies scheinbar nicht mehr. Es wäre also nützlich, die Extrempunkte möglichst effektiv berechnen zu können. Eine Möglichkeit:

- *betrachte alle maximalen Ketten $K = (K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq \ldots \subsetneq K_n)$ in 2^Ω und bilde dazu dasjenige Wahrscheinlichkeitsmaß, das auf den Elementen dieser Kette mit dem Necessity-Maß N übereinstimmt.*

$\Longrightarrow$ *Es gibt $n!$ maximale Ketten in 2^Ω, also maximal $n!$ Strukturecken*

- *Viele dieser so erhaltenen Strukturecken fallen zusammen $\Longrightarrow$ großer Aufwand.*

Andere Möglichkeit: Betrachte Möbiusinverse:

- *ein Element p aus $\mathcal{M}(N)$ ergibt sich durch Umverteilung der Massen $m(X)$ auf Teilmengen $Y \subseteq X$ derart, dass alle Masse auf Elementarereignissen liegt.*
- *formal kann so eine Umverteilung durch eine Allokation*

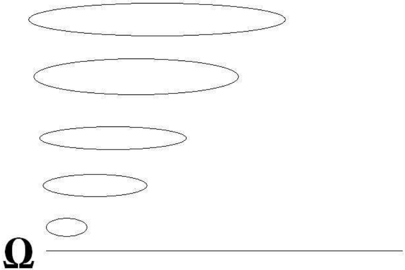
$$T : 2^{\Omega} \longrightarrow \Omega : X \mapsto T(X) \in X$$

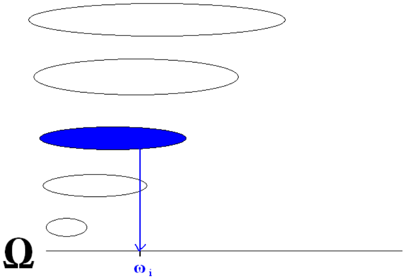
(bzw. durch Konvexkombinationen solcher Allokationen) dargsetellt werden via

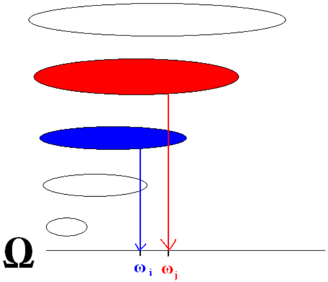
$$p(\{\omega_i\}) = \sum_{X, T(X) = \omega_i} m(X).$$

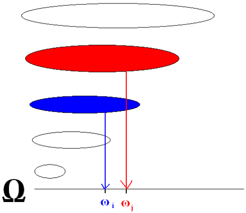
- *Die Extrempunkte der Struktur ergeben sich als spezielle Umverteilungen dadurch, dass erst alle Masse, die über einem ersten Elementarereignis liegt, auf dieses umverteilt wird, dann die restliche Masse, die über einem zweiten Element liegt, auf dieses verteilt wird und so fort.*

- *Hier ergeben sich wieder $n!$ Möglichkeiten für eine Festlegung, welches das erste, das zweite, ..., und welches das n-te Elementarereignis ist. Dies wäre äquivalent zur ersten Möglichkeit, wenn mann als erstes Elementarereignis $K_n \backslash K_{n-1}$ als zweites $K_{n-1} \backslash K_{n-2}$ usw. wählen würde.*
- *Alternativ kann man alle Allokationen betrachten (dies wären hier wieder $n!$ Stück) und alle Allokationen, die nicht zu einem Extrempunkt führen, weglassen:*

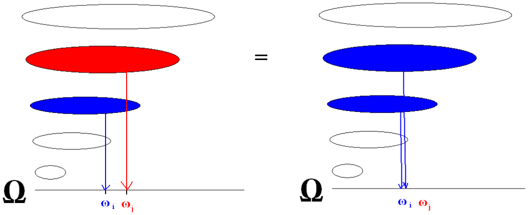

Ω

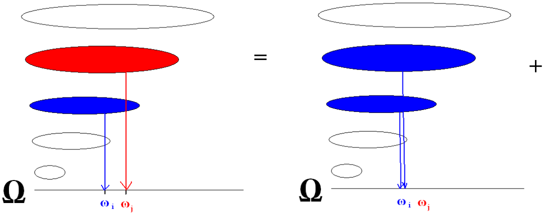

Ω
ω i

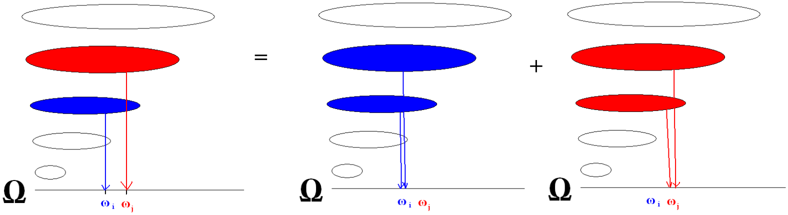

Ω
ωi
ωj


Ω
ωi
ωj

=


=
Ω
ωi ωj
Ω
ωi ωj


Ω
ω_i ω_j
=
Ω
ω_i ω_j
+


Ω
ωi ωj
=
Ω
ωi ωj
+
Ω
ωi ωj

Konkrete Berechnung aller Extrempunkte:

- Seien $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots, \supseteq F_k$ die fokalen Elemente des Necessity-Maßes N
- von $i = 1$ bis k:
  Entscheide, ob die Masse von F_i
  a) „in die Kette" umverteilt wird (d.h.: $T(F_i) \in F_{i+1}$)
  b) oder ob diese Masse „außerhalb der Kette" umverteilt wird ($T(F_i) \notin F_{i+1}$)
- Im Fall a) ist (für $i \neq k$) bereits festgelegt, wohin genau die Masse zu verteilen ist, nämlich auf das Element $T(F_{i+1})$.
- Im Fall b) gibt es genau $|F_i \backslash F_{i+1}|$ Möglichkeiten.
- Dies führt zu

$$(|F_1 \backslash F_2| + 1) \cdot (|F_2 \backslash F_3| + 1) \cdot \ldots \cdot (|F_{k-1} \backslash F_k|) \cdot |F_k| = |F_k| \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (|F_i \backslash F_{i+1}| + 1)$$

Extrempunkten.

Bemerkung

Die so erhaltenen Extrempunkte sind alle paarweise verschieden, so dass für die Zahl M aller Extrempunkte eines Necessity-Maßes gilt:

$$M = |F_k| \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (|F_i \backslash F_{i+1}| + 1).$$

Die maximale Anzahl ergibt sich, wenn die fokalen Elemente eine maximale Kette bilden:

$$\begin{aligned} M &= |F_k| \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (|F_i \backslash F_{i+1}| + 1) \\ &= 1 \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot \ldots = 2^{k-1}. \end{aligned}$$

Schwächere Abschätzungen für die Anzahl der Extrempunkte wurden z.B. in „Geometry of possibility measures on finite sets“ (Kroupa, 2008) erhalten, diese betrachten aber nicht die Möbiusinverse.

Verallgemeinerungen von gewöhnlichen Necessity-Maßen

Bisher: Necessity-Maße nur auf 2^{Ω} betrachtet.

- Es gibt in der Tat verschiedene kohärente previsions, die, eingechränkt auf 2^{Ω}, identische Necessity-Maße sind.
- fordert man zusätzlich z.B. Supermodularität (2-Monotonie), dann sind zei kohärente previsions bereits identisch, wenn sie auf 2^{Ω} übereinstimmen.

Frage: Wie sind Necessity-Maße sinnvoll zu verallgemeinern?

a) Fordere Kohärenz und $N(X \wedge Y) = \min\{N(X), N(Y)\}$ für alle $X, Y \in \mathscr{L}(\Omega)$. Diese Forderung ist sehr stark, es gibt nur triviale Necessity-Maße dieser Art. Betrachte dazu wieder Möbiusinverse (des Necessity-Maßes, eingeschränkt auf $\{0, 1, 2\}^{\Omega}$). Zunächst ist, analog zu oben, die Möbiusinverse nichtnegativ und die fokalen Elemente bilden eine Kette. Weiterhin kann man zeigen, dass für Mengen X gilt:

$$m(X) = m(2 \cdot X).$$

Ist also $X \in 2^{\Omega}$ ein fokales Element, so auch $2 \cdot X$. Für zwei fokale Mengen X und Y mit $X \subsetneq Y$ gilt aber weder $2 \cdot X \leq Y$ noch $2 \cdot X \geq Y$, d.h. die fokalen Elemente können keine Kette bilden. Es kann also nur eine fokale Menge X geben, auf der dann, wegen der Normierungsbedingung, die Masse 1 liegen muss. Es handelt sich somit um die „triviale" quasi-vacuous-prevision

$$N : \mathscr{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : Y \mapsto \inf_{\omega \in X} Y(\omega)$$

b) Ersetze das Infimum zweier Spiele durch eine andere Verallgemeinerung des Schnittoperators, z.B. durch (verallgemeinerte) T-Normen.
Man kann zeigen, dass kohärente previsions über $\mathscr{L}(\Omega)$, die auf 2^Ω wie gewöhnliche Necessity-Maße aussehen im Allgemeinen nicht strukturverträglich bezüglich dieser T-Normen sind.

c) verwerfe Kohärenz. Dies ist zweifelsohne möglich durch ersetzen der natürlichen Extension durch z.B. das (duale) Shilkret Integral. Dies bewahrt die Infimum-treue und somit wäre die Komposition entsprechend verallgemeinerter Necessity-Maße wieder ein Necesseity-Maß.
Das Shilkret-Integral hat jedoch die negative Eigenschaft:

$$\int X + \mu dN \neq (\int X dN) + \mu,$$

womit auch die Konstruktion einer dualen prevision nicht mehr eindeutig ist:

$$1 - \underline{P}(X^c) \neq -\underline{P}(-X).$$

Weiterhin werden dadurch auch nicht alle infimumtreuen Abbildungen, wie z.B. solche, die durch das (duale) Sugeno-Integral eines gewöhnlichen Necessity-Maßes entsehen, abgedeckt.
Eine klare Interpretation der Aussage $N(X) = \lambda$ wäre hier wünschenswert. Dies wäre alles sicherlich nicht mehr im Rahmen rationalen Wettverhaltens machbar.

d) Betrachte nur natürliche Extensionen von gewöhnlichen Necessity-Maßen.

- Diese sind dann im Allgemeinen nicht infimumtreu.
- Aber für Spiele X, Y der Form

$$\begin{aligned} X &= \lambda \cdot A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \lambda(\omega) \cdot A(\omega) \\ Y &= \lambda \cdot B : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \lambda(\omega) \cdot B(\omega) \end{aligned}$$

mit

$$A, B \in 2^{\Omega}$$

und

$$\lambda \in \mathscr{L}(\Omega)$$

gilt die Gleichung

$$N(X \wedge Y) = \min\{N(X), N(Y)\}$$

immer noch.

Deshalb ist die Komposition von Necessity-Maßen, die außer Ω nur eine weitere fokale Menge besitzen, immer noch schnittstabil auf 2^{Ω}, denn für derartige Necessity-Maße und zwei Mengen A, B lässt sich $N(A)$ und $N(B)$ darstellen als $\lambda \cdot C$ und $\lambda \cdot D$ und es folgt für die Komposition mit einem weiteren Necessity-Maß M :

$$\begin{aligned}(M \circ N)(A \cap B) &= M((N(A \cap B)) \\ &= M((N(A) \wedge N(B))) \\ &= M((N(A)) \wedge M((N(B)) = (M \circ N)(A) \wedge (M \circ N)(B).\end{aligned}$$

Walley, P. (1991). Statistical reasoning with imprecise probabilities. Chapman and Hall,. London.

Kroupa, T. (2008) Geometry of possibility measures on finite sets. International Journal of Approximate Reasoning, **48**, 237-245.

Shafer, G. (1976). A Mathematical Theory of Evidence. Princeton U. Pr.

Shapley, L.S. (1971). Cores of convex games. Int. J. Game Theory **1**, 11-26.

Choquet, G. (1953-54). Theory of capacities. Ann. Inst. Fourier (U. Grenoble) **5**, 131-295.

Shilkret, N. (1971). Maxitive measure and integration, Indag. Math. **33**, 109-116.