

Technische Universität Dresden

Fachrichtung Mathematik

Institut für Algebra

**Modellierung unsicheren Wissens durch
kohärente Prävisionen**

Diplomarbeit

zur Erlangung des ersten akademischen Grades

Diplommathematiker

vorgelegt von

Name: Schollmeyer Vorname: Georg

geboren am: 06.12.1983 in: Pirna

Tag der Einreichung: 28.02.2011

Betreuer: Prof. Dr. rer. nat. habil. Stefan E. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	4
2. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	5
2.1. Die klassische Wahrscheinlichkeitsinterpretation	6
2.2. Die frequentistische Wahrscheinlichkeitsinterpretation	10
2.3. Die subjektivistische Wahrscheinlichkeitsinterpretation	14
3. Kohärente Prävisionen	18
3.1. Definitionen	19
3.2. Axiome der Kohärenz	27
3.2.1. Elementare Eigenschaften kohärenter unterer Prävisionen	35
3.3. Geordnete Mengen und Verbände	38
3.4. Abbildungen zwischen geordneten Mengen	45
3.4.1. Hüllen- und Kernoperatoren	45
3.4.2. Adjunktionen	62
3.4.3. Eigenschaften der identischen Abbildung	64
3.5. Dempster-Shafer-Theorie	68
3.5.1. Mengenwertige Abbildungen	68
3.5.2. Spiele über geordneten Mengen	70
3.5.3. Möbiusinversion über geordneten Mengen	75
3.6. Darstellung kohärenter Prävisionen	81
3.7. Beispiele kohärenter Prävisionen	84
3.8. Der Kern einer kohärenten Prävision	92
3.9. Beispiele von Kernen kohärenter Prävisionen	103
3.10. Fortsetzung von unteren Wahrscheinlichkeiten	116
3.11. Erzeuger einer unteren Prävision	124
3.12. Die Möbiusinverse von kohärenten supermodularen Prävisionen	134
3.13. Zusammenhang der natürlichen Extension zum Choquetintegral	136
3.14. Approximation von Kapazitäten	138
4. Ausblick	142
A. Notation	147

1. Einleitung

Die herkömmliche Mathematisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist nur eine mögliche unter vielen und muss sich im Wettbewerb der Ideen behaupten. Dem unverkennbaren Erfolg statistischer Methoden steht ein „ewiges Gefecht“ zwischen verschiedenen Schulen der philosophischen Grundlegung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs mit immer noch ungelösten Problemen gegenüber. Zu diesen Problemen gehört nicht weniger als das Problem der Induktion und überhaupt der Möglichkeit von gesicherter (wissenschaftlicher) Erkenntnis:

„In short, like every other form of inductive logic, the logic of probable inference, or 'probability logic', leads either to an infinite regress, or to the doctrine of apriorism.“

K.R.Popper,[23],S.6.

In einigen Bereichen, wie z.B. der künstlichen Intelligenz hat sich außerdem die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie scheinbar nicht immer fruchtbar anwenden lassen. Dies legt nahe, über andere bzw. allgemeinere Konzepte zur Beschreibung unsicheren Wissens nachzudenken. Angeregt durch eine Vorlesung über die sogenannte „Dempster-Shafer-Theorie“ und die Monographie „Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities“ von Peter Walley ([37]) entstand die Überlegung, dass spezielle Konzept der Belief-Funktionen der Dempster-Shafer-Theorie dem sehr allgemeinen Konzept kohärenter Prävisionen gegenüberzustellen. Die vorliegende Diplomarbeit betrachtet speziell das Verhältnis der Kohärenz zur vollständigen Monotonie von unpräzisen Wahrscheinlichkeiten bzw. allgemeiner von Prävisionen, die als Bewertung von Spielen als fundamentaler angesehen werden. Die Definition der Kohärenz und der natürlichen Extension wird verallgemeinert, so dass sie z.B. auf Kernoperatoren angewendet werden kann. Die Möbiusinverse von supermodularen kohärenten Prävisionen wird untersucht, so daß auch die Algebra hier ins Spiel kommt. Die philosophischen Probleme der Formalisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs werden auch kurz angerissen, für eine umfangreiche Diskussion der Problematik der adäquaten Interpretation sowie für eine allgemeine Einführung sei aber ausdrücklich auf [37] verwiesen. Die wesentlichen eigenen Beiträge sind in der Verallgemeinerung der Definition der natürlichen Extension, Satz 3.5.15 (zumindest in dieser Allgemeinheit), Satz 3.10.1, Satz 3.10.3 sowie den Abschnitten 3.11, 3.12 und 3.14 zu sehen.

2. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Die heute üblicherweise verwendete Formalisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs geht auf Kolmogorov ([19]) zurück. Dabei ist eine Menge Ω , der „Raum aller möglichen Zustände der Welt“, eine σ -Algebra $\mathcal{S} \subseteq 2^\Omega$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$ gegeben. Eine σ -Algebra ist ein Mengensystem mit folgenden Eigenschaften:

- $\emptyset \in \mathcal{S}$
- $A \in \mathcal{S} \implies A^c \in \mathcal{S}$
- $T \subseteq \mathcal{S}, T$ abzählbar $\implies \bigcup T \in \mathcal{S}$.

\mathcal{S} beschreibt die Menge aller meßbaren Mengen. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P erfüllt die Eigenschaften:

- $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$ (Normiertheit)
- Für alle abzählbaren $T = \{T_1, T_2, \dots\} \subseteq \mathcal{S}$ mit $T_i \cap T_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(T_i)$$
 (σ -Additivität).

$P(A)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A . Bei der Anwendung der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie muß insbesondere darauf geachtet werden, daß innerhalb der konkreten Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs die kolmogorov'schen Axiome erfüllt werden. Wir skizzieren nun grob die bekanntesten Wahrscheinlichkeitsinterpretationen nach [14] und problematisieren die Anwendbarkeit auf bestimmte Problemsituationen und die Erfüllung der kolmogorov'schen Axiome (Interpretationen, wie z.B. die logische Wahrscheinlichkeitsinterpretation nach Carnap [4], die als Verallgemeinerung der klassischen Interpretation, und die Propensitätsinterpretation nach Popper [24], die als Modifikation der frequentistischen Interpretation aufgefasst werden können, wurden hier weggelassen).

2.1. Die klassische Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Die klassische Wahrscheinlichkeitsinterpretation geht auf die Arbeiten von Laplace, Pascal, Bernoulli, Huygens und Leibniz im Zusammenhang mit Glücksspielen zurück. Hier werden bestimmten Ereignissen bei Abwesenheit von Evidenz oder bei symmetrisch verteilter Evidenz „Wahrscheinlichkeiten“ zugeordnet. Die Grundidee dahinter ist, dass der „Raum Ω aller Möglichkeiten“ in Elementarereignisse unterteilt werden kann, die als gleichwahrscheinlich betrachtet werden können. Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses E (dies ist eine Teilmenge von Ω) ergibt sich dann als Verhältniss von Elementarereignissen, die zum Ereignis E gehören zur Anzahl aller möglichen Elementarereignisse:

„The theory of chance consists in reducing all the events of the same kind to a certain number of cases equally possible, that is to say, to such as we may be equally undecided about in regard to their existence, and in determining the number of cases favorable to the event whose probability is sought. The ratio of this number to that of all the cases possible is the measure of this probability, which is thus simply a fraction whose numerator is the number of favorable cases and whose denominator is the number of all the cases possible.“ (Laplace, [20] 6-7).

Es stellt sich hier unter anderem die Frage, was unter „equal possible“ zu verstehen ist. Der Begriff der Möglichkeit ist zunächst ein rein logischer und kann somit entweder zutreffen oder nicht, es gibt aber keine Abstufungen der Möglichkeit. Was es heißt, „gleichmäßig unentschieden“ bezüglich der Existenz von Fällen zu sein wird auch nicht beschrieben. Es scheint, als solle hier eine subjektivistische Wahrscheinlichkeitsinterpretation gegeben werden, aber das ist nicht die Absicht von Laplace. Er will eine objektive Wahrscheinlichkeitszuordnung eines „rationalen Agenten“, der epistemisch neutral ist, bezüglich einer Menge von „gleichmäßig möglichen“ Fällen konstruieren. Aber was heißt es dann anderes für einen rationalen Agenten, „gleichmäßig unentschieden bezüglich bestimmter Fälle zu sein“ als ihnen die gleiche Wahrscheinlichkeit zuzuordnen? Der Begriff der Gleichmöglichkeit wird näher erläutert, in dem das „Prinzip vom unzureichenden Grund“ eingeführt wird: Wannimmer es keinen Grund oder keine Evidenz dafür gibt, einen Fall gegenüber einem anderen zu bevorzugen, so müssen diese beiden Fälle gleichwahrscheinlich sein. Wir können hier den Fall, dass überhaupt keine Evidenz vorliegt, und den Fall, dass symmetrisch verteilte Evidenz vorliegt, unterscheiden. Der erste Fall scheint in der Praxis selten vorzukommen. Außerdem ist der Schluß von Abwesenheit von Evidenz jeglicher Art auf das Vorliegen von Symmetrie (bezüglich welcher Eigenschaft auch immer) nicht immer zulässig. Im zweiten Fall ist unklar, was mit symmetrisch verteilter Evidenz gemeint ist. Es muss eine Methode zur Wichtung verschiedenartiger Evidenz geben. Dies scheint jedoch wiederum den Begriff der Wahrscheinlichkeit bereits zu benötigen, denn eine übliche Methode, Evidenz als symmetrisch bezüglich möglicher vorliegender Fälle c_1, \dots, c_n zu definieren ist die, dass die bedingten Wahrscheinlichkeiten bezüglich gegebener Evidenz E gleich sind: $P(c_1|E) = P(c_2|E) = \dots = P(c_n|E)$. Dies bedeutet, dass in diesem

Fall die Begriffsbildung der „Wahrscheinlichkeit“ zirkulär ist. Drei Beispiele sollen zeigen, dass dieser „Wahrscheinlichkeitsbegriff“, worauf immer er auch abzielt, in bestimmten Situationen zu Schwierigkeiten führt:

(a):

Gegeben sind zwei Urnen A und B . In Urne A befinden sich 10 rote und 10 schwarze Kugeln. In Urne B befinden sich 20 Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, aus Urne A eine rote Kugel zu ziehen ist 0.5, denn es gibt 10 rote von insgesamt 20 Kugeln, deren Ziehung jeweils gleichwahrscheinlich ist. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel aus Urne B ist unklar, denn es ist unbekannt, ob sich in Urne B überhaupt rote Kugeln befinden, also ist unbekannt, ob eine rote gezogene Kugel überhaupt zu dem Grundraum Ω gehört. Falls weiterhin bekannt ist, dass es mindestens eine rote und eine schwarze Kugel und keine Kugeln anderer Farben in Urne B gibt, so würde die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel auch 0.5 betragen (analoges gilt für das Ziehen einer schwarzen Kugel). Dies bedeutet, dass für beide Urnen die gleichen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden, obwohl über Urne A mehr bekannt ist als über Urne B . Bei einem Glücksspiel, welches z.B. bei Ziehung einer roten Kugel einen Geldgewinn erbringt und bei Ziehung einer schwarzen Kugel keinen, kann es aber trotzdem erheblich sein, aus welcher Urne gezogen wird, denn bei mehrmaligem Wiederholen des Glücksspiels (mit Zurücklegen) wäre der von einem Spieler „erwartete Gewinn“ sicherlich von dem genauen Verhältnis von roten zu schwarzen Kugeln abhängig. Würden z.B. während der ersten 100 Spiele mit Urne A nur schwarze Kugeln gezogen, wäre er vermutlich eher bereit das Spiel fortzusetzen als wenn dies für Urne B der Fall wäre, denn im Fall von Urne B würde er aus den ersten 100 gezogenen schwarzen Kugeln schließen, dass sich vermutlich mehr schwarze als rote Kugeln in Urne B befinden. Wenn bei jedem Spiel die Zusammensetzung der Urne B verändert würde (aber mit mindestens einer roten und einer schwarzen Kugel und keinen andersfarbigen Kugeln), so würde sich das Verhalten des Spielers wieder ändern. Er würde Informationen über den Ausgang vorhergegangener Spiele nicht mehr für seine Bewertung von zukünftigen Spielen heranziehen. Die Wahrscheinlichkeitszuordnungen wären aber auch in diesem Fall wieder gleich. Die Wahrscheinlichkeiten spiegeln hier also weder Symmetrien noch Informationen oder gar das zu erwartende Verhalten eines Spielers korrekt bzw. vollständig wieder.

(b) (entlehnt aus [12]):

Eine Manufaktur produziert Würfel mit Kantenlängen zwischen 0 cm und 1 cm . Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Werkstück eine Kantenlänge zwischen 0 cm und 0.5 cm besitzt? Zunächst kann ein zufällig ausgewählter Würfel unendlich viele Kantenlängen besitzen, d.h. Ω ist unendlich und der Laplace'sche Ansatz ist nicht anwendbar. Wir können aber, um die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E =$ „Kantenlänge kleinergleich 0.5 cm “ zu berechnen, die Summe von gleichen Einzelwahrscheinlichkeiten durch ein Integral über eine konstante Dichte

ersetzen und erhalten aus der Forderung

$$1 = P(\Omega) = \int_0^1 c \, dx = c$$

den Wert der Dichte $c = 1$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann zu:

$$P(E) = \int_0^{0.5} c \, dx = 0.5.$$

Das Ereignis „Kantenlänge kleinergleich 0.5 cm “ ist aber äquivalent zum Ereignis „Grundfläche kleinergleich 0.25 cm^2 “, und wenn wir hier analog verfahren, erhalten wir als Dichte c' :

$$1 = P(\Omega) = \int_0^1 c' \, dx = c'$$

und somit die Wahrscheinlichkeit

$$P(E) = \int_0^{0.25} c' \, dx = 0.25.$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E ist also abhängig von der konkreten Darstellung von E , so dass sie keine Eigenschaft des Ereignisses E sein kann. Damit ist dieser Ansatz wertlos.

(c):

Es werden zwei Handlungsalternativen A_1 und A_2 betrachtet, die abhängig vom Eintreten gewisser Elementarereignisse $\omega \in \Omega := \mathbb{Z}$ verschiedene finanzielle Gewinne oder Verluste $A_1(\omega)$ bzw. $A_2(\omega)$ (in einer bestimmten Einheit, z.B. \$) bewirken. Für A_1 und A_2 gelte:

$$\begin{aligned} A_1(\omega) &= \omega \\ A_2(\omega) &= \omega + 1. \end{aligned}$$

Sei über die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse nichts weiter bekannt. Dann wären nach Laplace alle diese Elementarereignisse als gleichwahrscheinlich zu betrachten. Vergleichen wir nun die Alternativen A_1 und A_2 , so stellen wir fest, dass das Eintreten des Ereignisses $\omega = i$ und des Ereignisses $\omega = i - 1$ für $i \in \mathbb{Z}$ gleichwahrscheinlich ist. Deshalb ist auch das Eintreten eines Gewinns von $\$i$ bei Wahl von Alternative A_1 gleichwahrscheinlich wie bei Wahl von Alternative A_2 , d.h. aus dieser Perspektive wäre ein gleicher Gewinn bzw. Verlust beider Alternativen zu erwarten und man würde keine der Alternativen bevorzugen. Vergleicht man jedoch für jedes $\omega \in \Omega$ den gemachten Gewinn, so ist dieser für die Alternative A_2 immer um $\$1$ höher als für Alternative A_1 , so dass A_2 klar gegenüber A_1 zu bevorzugen wäre. Dies ist ein Widerspruch, der nahelegt, dass die Elementarereignisse nicht gleichwahrscheinlich sein können. Wir haben hier keine Additivität oder Normiertheit eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P benutzt. Wir haben nichteinmal benutzt, dass wir

Wahrscheinlichkeiten durch Zahlen ausdrücken. Das bedeutet, dass schon allein das Konzept der Reduzierung auf gleichwahrscheinliche Ereignisse Probleme macht. Wir können aus dem obigen Widerspruch auf eine irgendwie geartete ungleichmäßige Wahrscheinlichkeitsbewertung schließen, wissen aber nicht welche genau vorliegt (dies alles natürlich nur unter der Annahme, dass überhaupt eine vorliegt, was immer das heißt). Um zu erkennen, dass A_2 gegenüber A_1 vorzuziehen ist, ist jedoch gar nicht nötig, diese Verteilung zu kennen, denn für jedes klassische Wahrscheinlichkeitsmaß p gilt:

$$p(A_2 - A_1) = p(\mathbf{1}_\Omega) = p(\Omega) = 1,$$

d.h. der erwartete Gewinn des Austauschs von Alternative A_1 durch A_2 , der durch die Abbildung

$$A_2 - A_1 : \Omega \in \mathbb{Z} : \omega \mapsto A_2(\omega) - A_1(\omega)$$

beschrieben wird, beträgt \$1. Ein Wahrscheinlichkeitsbegriff, der völlige Abwesenheit von jeglicher Information über alle Elementarereignisse reflektieren kann, der aber auch das Vorziehen von A_2 gegenüber A_1 anzeigen kann, scheint wünschenswert. Kohärente Prävisionen können dies leisten. In diesem einfachen Falle „vollständiger Ignoranz“ ist die passende untere Prävision \underline{P} gegeben durch:

$$\underline{P}(X) := \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega).$$

Aus $\underline{P}(A_2 - A_1) = \inf_{\omega \in \Omega} 1 = 1$ folgt bereits, dass A_2 gegenüber A_1 zu bevorzugen ist (die Alternativen A_1 bzw. A_2 selber sind hier nicht bemessbar, da sie unbeschränkt sind, dies ist aber für die konkrete Entscheidungssituation unerheblich).

2.2. Die frequentistische Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Es gibt im Wesentlichen zwei frequentistische Interpretationen. Beim **finiten Frequentismus**, der u.a. von Venn ([33]) entwickelt wurde, wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E als relative Häufigkeit des Eintretens von E in einer endlichen Referenzklasse R von Ereignissen definiert. Ähnlich zur klassischen Wahrscheinlichkeitsinterpretation wird also jedem Ereignis in der Referenzklasse R das gleiche Gewicht beigemessen. Der wesentliche Unterschied zur klassischen Wahrscheinlichkeitsinterpretation besteht darin, dass aktuell auftretende Ereignisse und nicht mögliche Ereignisse betrachtet werden. Für diese Definition der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen gelten, ebenso wie für die klassische Interpretation, automatisch die Kolmogorovschen Axiome (auch die σ -Additivität gilt, denn es gibt immer nur endlich viele aktuell auftretende bzw. mögliche Ereignisse in R), es ergeben sich aber einige Probleme: Wie hoch ist z.B. die Wahrscheinlichkeit, mit einer Münze, die nicht geworfen wird, „Zahl“ zu werfen. Da die Referenzklasse R leer ist, ist diese Wahrscheinlichkeit undefiniert, die Wahrscheinlichkeit entsteht also erst im Moment des Werfens der Münze. Dies ist z.B. bei der Vermessung des Durchmessers der Münze anders. Auch wenn man den Durchmesser der Münze nicht kennt besitzt sie einen Durchmesser. Wirft man eine Münze nur einmal, dann kann die zugehörige Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von „Zahl“ nur 0 oder 1 sein, man kann also in diesem Fall nie von einer fairen Münze sprechen. Weiterhin kann das n -malige Werfen einer Münze als ein einzelnes Experiment aufgefasst werden, bei dem dann das Auftreten des konkreten beobachteten Ergebnisses Wahrscheinlichkeit 1 hat. Insbesondere würde bei Wiederholung des Experimentes genau das gleiche Ergebnis „mit Wahrscheinlichkeit 1“ erwartet werden. Wenn z.B. beim ersten von 100 Würfeln Zahl fällt und die anderen 99 mal Kopf, so würde man beim 101-ten Wurf auf Zahl tippen. Dies scheint der intuitiven Vorstellung von Wahrscheinlichkeit zu widersprechen. Beim **infiniten Frequentismus** (vertreten durch z.B. Reichenbach [26] oder von Mises [22]) werden hingegen unendliche Referenzklassen betrachtet und der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintretens von Ereignissen in einer „Wahrscheinlichkeitsfolge“ wird als Wahrscheinlichkeit interpretiert. Hier entsteht sofort das Problem, dass Aussagen über das Vorliegen von Wahrscheinlichkeiten in praktischen Fällen weder verifizierbar noch falsifizierbar sind, denn es ist eine unendliche Anzahl von Versuchen durchzuführen und man kennt immer nur einen endlichen Abschnitt der Wahrscheinlichkeitsfolge. Insbesondere ist jeder Limes der relativen Häufigkeit des Auftretens eines Ereignisses E mit jedem möglichen endlichen Anfang der Wahrscheinlichkeitsfolge verträglich. Beschränkt man sich auf hypothetisch gegebene, „potentiell unendliche“ Wahrscheinlichkeitsfolgen, so bleibt bei extensional gegebenen Wahrscheinlichkeitsfolgen (das sind Folgen, die durch konkrete Angabe aller Folgenglieder, z.B. durch eine Tabelle, gegeben sind) das Problem der Unentscheidbarkeit erhalten. Mißt man z.B. jeden Tag die Temperatur an einem bestimmten Ort, so ist die Angabe aller Temperaturwerte potentiell unendlich und die Bestimmung des Folgengliedes an einem bestimmten Tag ist eindeutig definiert (es handelt sich hier also in gewisser Weise auch um eine intentional, d.h. durch eine Vorschrift gegebene Wahrscheinlichkeitsfolge). Zu jedem Tag ist die Wahrscheinlichkeitsfolge bis zu diesem

Tag bekannt, aber der Limes der Folge ist, falls er überhaupt existiert, prinzipiell unbestimmbar. Bei intensional gegebenen Folgen kann in bestimmten Fällen der Limes gefunden werden, z.B. konvergiert für die Folge $(a_n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2}$ die relative Häufigkeit des Eintretens des Ereignisses „ $a_n = 1$ “ offensichtlich gegen $\frac{1}{2}$. Bei komplizierteren Folgen ist allerdings nicht immer klar, ob sie gegen einen Grenzwert konvergieren und wenn ja, gegen welchen. Es ist auch nicht klar, ob das Vorliegen eines bestimmten Grenzwertes p grundsätzlich mit geeigneten mathematischen Beweismethoden beweisbar oder widerlegbar ist. Reichenbach bemerkt dazu, dass das Vorliegen einer Wahrscheinlichkeit zwar nicht bezüglich der klassischen Logik, wohl aber bezüglich seinem Verfahren der Approximation „entscheidbar“ ist: Bezeichne $h_n(x)$ die relative Häufigkeit des Auftretens des Ereignisses E in den ersten n Elementen einer Wahrscheinlichkeitsfolge $x = (x_n)$. Setzt man nun für $n \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ die Aussage A_n :

„Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E eintritt, liegt im Intervall $[h_n(x) - \delta, h_n(x) + \delta]$.“
 Dann kann diese Aussage (abhängig von n und δ) wahr oder falsch sein. Fasst man aber die Aussagen A_n als Glieder einer Wahrscheinlichkeitsfolge (A_n) auf, so besitzt diese selber Wahrscheinlichkeit 1, falls $h_n(x)$ überhaupt gegen einen Grenzwert p konvergent, denn dann gibt es für jedes $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|h_n(x) - p| \leq \delta$ für $n \geq n_0$ und somit sind alle A_n mit $n \geq n_0$ wahr und die relative Häufigkeit des Eintretens einer wahren Aussage A in der Wahrscheinlichkeitsfolge $A = (A_n)$ konvergiert somit gegen 1. Reichenbach illustriert dieses Approximationsverfahren mit einem Beispiel:

„Dieses Vorwegnehmen des Ziels ist das Charakteristische vieler Approximationsverfahren; ein Beispiel mag dies noch näher verdeutlichen. Ein Flugzeug fliegt im Nebel nach einem fernen Ziel; es läßt sich seinen von zwei Landstationen durch Funkpeilung ermittelten Ort telegraphieren, und bestimmt dann nach der Karte die Richtung, in der es fliegen muß. Den ermittelten Kurs stellt der Führer auf dem Kompaß ein und fliegt nun unter ständiger Einhaltung dieser Kompaßstellung weiter. Immer im Nebel, hat der Führer keine andere Orientierung als dieses Festhalten an dem angenommenen Kurs; nach einiger Zeit telegraphiert er jedoch wieder an die Peilstationen und läßt eine neue Ortsbestimmung machen. Es zeigt sich, daß das Flugzeug im Wind abgetrieben ist, und der Führer stellt darufhin einen neuen Kurs ein, den er jetzt festhält. Dieses Verfahren, immer wiederholt, ist dem Approximationsverfahren der Induktionsregel vergleichbar. Die Richtung vom Standort zum Ziel ist zwar wegen der Windstömungen im Anfang nicht die günstigste, aber der Flieger kennt die wechselnden Windströmungen nicht, und darum setzt er zunächst auf diese Richtung. Er glaubt nicht etwa, damit schon die endgültige Richtung getroffen zu haben; erst wenn er dem Ziel sehr nah ist, wird die geometrische Verbindungslinie auch die günstigste Flugrichtung sein - aber er tut so, als ob die Übereinstimmung von günstigster Flugrichtung und geometrischer Verbindungslinie schon erreicht wäre, er nimmt das Endergebnis vorweg. Er darf das, weil er dieses Vorwegnehmen nur im Sinne einer Setzung benutzt; indem er die benutzte Setzung ständig nach demselben Prinzip korrigiert, muß er schließlich einmal mit der Setzung das Richtige treffen.“ ([26], S. 412)

Dieses Approximationsverfahren setzt eine Wahrscheinlichkeitsfolge voraus, die gegen einen Limes

konvergiert (streng genommen setzt Reichenbach nur sogenannte übersehbare Folgen voraus, dies sind Folgen $x = (x_n)$, die durch andere konvergente Folgen $y = (y_n)$, die Aussagen über die relative Häufigkeiten der Form $h_n(x) \in [p - \delta, p + \delta]$ enthalten, charakterisiert werden können, siehe S.409). Da die Richtigkeit dieser Voraussetzung aber weder apriori noch empirisch entschieden werden kann ist die Annahme dieser Voraussetzung problematisch. Beim obenstehenden Beispiel ist klar, dass das Flugzeug genau ein Ziel hat. Dies entspricht dem Vorliegen genau eines Grenzwertes der Folge $(h_n(x))$. Diese Annahme ist erheblich für die „Überzeugungskraft“ dieses Beispiels. Das Vorliegen eines Zieles läßt sich durchaus auch als falsch erkennen, falls mehrere Passagiere z.B. das falsche Flugzeug gewählt haben und dies (z.B. durch Kommunikation miteinander) erkennen. Dann könnte es besser sein, dies dem Führer (der in diesem dann etwas unpassend gewordenen Beispiel nicht weiß, welches Ziel bzw. welche Ziele anzufliegen sind) mitzuteilen und ihn zu bitten, wenigstens eines der Flugziele anzufliegen, anstatt eine endlose Odyssee zwischen mehreren Zielen zu begehen. Diese Vorgehensweise entspräche in etwa der Betrachtung des Limes inferior und des Limes superior von (h_n) , die ja auch immer existieren.

Als Schätzer des Limes inferior der relativen Häufigkeit könnte man

$$\underline{h}_n(x) = \min\{h_j(x) | k(n) \leq j \leq n\}$$

mit monotonem $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $k(n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ wählen. Dieser Schätzer konvergiert aber scheinbar nicht immer gegen den Limes inferior, wie es der Schätzer $h_n(x)$ für konvergentes x tut. Für gegen p konvergentes $h_n(x)$ existiert für jedes $\delta > 0$ ein n_0 mit $h_n(x) \in [p - \delta, p + \delta]$, also gilt auch $\underline{h}_n(x) \in [p - \delta, p + \delta]$ für $k(n) \geq n_0$, so dass in diesem Fall auch \underline{h}_n gegen $\liminf_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$ konvergiert (die Konvergenzgeschwindigkeit kann hier aber durchaus geringer sein). Auch ein abgeschwächtes Bernoullisches Theorem kann gezeigt werden (siehe [36], hier wird auch gezeigt, dass der erhaltene Wahrscheinlichkeitsbegriff der einer kohärenten unteren Wahrscheinlichkeit ist, denn er kann als „lower envelope“ dargestellt werden). In gewisser Weise haben wir somit das Problem der Unentscheidbarkeit des Vorliegens eines Grenzwertes von $h_n(x)$ gegen das Problem der eventuell nicht mehr möglichen Approximation des Limes inferior ausgetauscht. Insbesondere wissen wir nicht, für welche nichtkonvergenten Wahrscheinlichkeitsfolgen die Approximation noch klappt. In der Tat hat die reichenbach'sche Verfahrensweise eine gewisse Eleganz, denn sie kann als logische Implikation dargestellt werden:

„Wir dürfen sagen: wenn die Welt aus übersehbaren Folgen besteht, so ist die Induktionsregel ein Verfahren, welches in endlich vielen Schritten mit einer Genauigkeit δ ans Ziel führt, ...“ ([26], S. 413).

Damit ist dem Induktionsprinzip (dies ist grob gesagt das Schließen vom Einzelfall auf die Gesamtheit), „... welches zum erstenmal durch David Hume seine scharfe Formulierung gefunden hat und seitdem als ein ungelöstes Rätsel vor der Erkenntnistheorie steht“ ([26], S. 410), ein logisches Gesicht gegeben. Ein weiterer wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Ansätzen ist, dass ein eventuell vorhandener Grenzwert von $h_n(x)$ mehr aussagt als ein Limes inferior. Ist p der Grenzwert von $h_n(x)$ bezüglich des Auftretens des Ereignisses E und $\delta > 0$ beliebig, so kann man

auf lange Sicht auf E mit dem Einsatz $p - \delta$ wetten, d.h. man setzt den Einsatz $\$p - \delta$ und im Fall des Eintretens des Ereignisses E bekommt man $\$1$, ansonsten nichts. Nach einer endlichen Zahl von Spielen macht man dann einen Gewinn, der nie wieder zu einem Verlust führt. Man kann aber auch auf das Komplementärereignis E^c mit dem Einsatz $1 - p - \delta$ wetten. Ist hingegen p nur der Limes inferior, so kann man nur auf E mit dem Einsatz $p - \delta$ wetten, nicht aber auf E^c , denn der Limes superior könnte hier 1 sein. Da man aber in den meisten Entscheidungssituationen zugleich auf E und E^c setzt, denn dass fälschliche Annahmen von E in einem Fall, wo eigentlich E^c vorliegt und umgekehrt bedeutet meist in beiden Fällen einen (z.B. finanziellen) Verlust. Das bedeutet, dass der Reichenbachsche Ansatz für Entscheidungssituationen passend ist, der andere Ansatz aber für die Repräsentation von unsicherem Wissen, welches keine Entscheidung verlangt, angemessen erscheint (dies wird z.B. in [37], S.21 unter der Formel „Inference versus decision“ geführt). Ein weiteres allgemeines Problem der frequentistischen Interpretation besteht in der Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten von der Referenzklasse. Ein Ereignis E kann bezüglich mehreren Referenzklassen verschiedene Wahrscheinlichkeiten besitzen. Man könnte hier das Infimum und das Supremum aller möglichen Wahrscheinlichkeiten als untere und obere Wahrscheinlichkeit betrachten und würde ebenfalls einen verallgemeinerten Wahrscheinlichkeitsbegriff erhalten. Vom mathematischen Standpunkt aus handelt es sich dann genau um eine kohärente untere Wahrscheinlichkeit.

2.3. Die subjektivistische Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Die subjektivistische Interpretation, vertreten von z.B. Ramsey [25], de Finetti [11] und Savage [29] subsumiert unter dem Begriff „Wahrscheinlichkeit“ den „Grad des Vertrauens - Englisch: Degree of belief- eines bestimmten Subjektes zu einem bestimmten Zeitpunkt auf Grund einer bestimmten Informationsmenge in Bezug auf das Eintreten eines Ereignisses. Dies steht im Gegensatz zu anderen Auffassungen, die sich auf besondere Arten von Fällen beschränken, in denen 'objektiven Wahrscheinlichkeiten' ein Sinn zugeschrieben wird (z.B. symmetrische Fälle wie bei Würfeln usw. 'statistische' Fälle 'wiederholbarer' Ereignisse usw.)“ ([11], S.6). Für die Bestimmung dieser Vertrauensgrade schlägt de Finetti folgende operationale Definition vor:

„Treten wir nun direkt in das Argument ein, indem wir von der Betrachtung eines zufälligen Gewinnes X ausgehen (d.h. von einer Zufallsgröße X , die - natürlich im algebraischen Sinne - die Bedeutung eines Gewinnes hat: ein Verlust ist ein negativer Gewinn. Die möglichen Werte für X können daher auch zum Teil oder alle negativ sein). Wir werden ein Individuum, z.B. Dich, fragen können, welches der sichere, X äquivalente Gewinn ist, den wir (für Dich) Preis von X nennen und mit $P(X)$ bezeichnen können, in dem Sinne, daß nach Deiner Präferenzskala, der Zufallsgewinn X einem sicheren Gewinn x vorzuziehen ist oder nicht, je nachdem, ob x größer oder kleiner als $P(X)$ ist.“ ([11], S.94).

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E ist dann gegeben durch den Preis des Spieles $\mathbb{1}_E$, welches bei Eintreten von E einen Wert von 1 hat und ansonsten 0. Mit dem sogenannten „Dutch Book argument“ folgt dann, dass eine subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung P die formalen Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes (allerdings mit endlicher Additivität anstelle der σ -Additivität) erfüllen sollte ([32]):

Ein Dutch book ist eine (endliche) Serie von Wetten, die von einem Subjekt jeweils für sich genommen eingegangen würden, die aber zusammen betrachtet in jedem Fall einen Verlust mit sich bringen. Eine solche Serie sollte für ein „rationales“ Subjekt nicht existieren. Gilt z.B. $P(A \cup B) < P(A) + P(B)$ für disjunkte Ereignisse A und B , so könnte ein Gegenspieler das Spiel $A \cup B$ zum Preis $P(A \cup B)$ kaufen und einzeln als Spiele A und B für die Preise $P(A)$ bzw. $P(B)$ wieder verkaufen und würde somit einen sicheren Gewinn $P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ machen, d.h. jedes Subjekt, das eine solche Wahrscheinlichkeitsbewertung P und ein dementsprechendes Wettverhalten hätte, würde in diesem Fall einen sicheren Verlust machen. Das Dutch Book Argument setzt aber voraus, dass jedes Spiel X genau einen Wert besitzt. Es kann aber auch sein, dass der Kauf- und der Verkaufspreis eines Spiels unterschiedlich sind.

Dies soll nun am Beispiel einer der Ellsberg-Paradoxien aus [10] diskutiert werden. Gegeben sei eine Urne, die 30 rote Kugeln und 60 schwarze oder gelbe Kugeln enthält (das Verhältnis von schwarzen Kugeln zu gelben Kugeln sei also nicht bekannt). Es wird zufällig eine Kugel aus der Urne gezogen und die zwei Spiele I und II angeboten:

Spiel I erbringt beispielsweise einen Gewinn von \$100 falls eine rote Kugel gezogen wird und

	30 Kugeln	60 Kugeln	
Spiel	rot	schwarz	gelb
<i>I</i>	\$100	\$0	\$0
<i>II</i>	\$0	\$100	\$0

ansonsten keinen Gewinn. Spiel *I* ist also eine "Wette auf rot" und Spiel *II* eine „Wette auf schwarz“. Als Kauf- und Verkaufspreis für Spiel *I* könnte man hier $\$ \frac{100}{3}$ ansetzen, denn es ist in einem Drittel aller durchgeführten Spiele ein Gewinn von \$100 zu erwarten. Für Spiel *II* differieren aber der Kauf- und der Verkaufspreis. Beim Kauf dieses Spieles kann es „im schlimmsten Fall“ (wenn es keine schwarzen Kugeln gibt) eine Gewinnerwartung von \$0 haben. Für den Verkauf ist im schlimmsten Fall, wenn es keine gelben Kugeln gibt, ein Verkaufspreis von $\$ \frac{200}{3}$ zu verlangen. Die Frage lautet nun:

„Welche Wette ist zu bevorzugen?“

Betrachte nun weiterhin die Spiele *III* und *IV*:

	30 Kugeln	60 Kugeln	
Spiel	rot	schwarz	gelb
<i>III</i>	\$100	\$0	\$100
<i>IV</i>	\$0	\$100	\$100

Spiel *III* ist eine „Wette auf rot oder gelb“ und Spiel *IV* ist eine „Wette auf schwarz oder gelb“ und die Frage lautet wieder:

„Welche Wette ist zu bevorzugen?“

Nach Ellsberg ist eine häufige Antwort auf diese Fragen, dass Wette *I* gegenüber Wette *II* und dass Wette *IV* gegenüber Wette *III* bevorzugt wird. Eine weniger häufige Antwort ist, dass Wette *II* gegenüber Wette *I* und dass Wette *III* gegenüber Wette *IV* bevorzugt wird. Diese beiden häufigsten Antworten verletzen jedoch das sogenannte „Sure-thing Principle“ ([29]): Dieses sagt aus, dass die Wahl zwischen zwei Spielen, die für ein konkretes Ereignis den gleichen Gewinn erbringen, nicht von dem konkreten Wert dieses Gewinnes abhängen darf. Dies bedeutet in unserem Fall, dass Wette *III* gegenüber Wette *IV* bevorzugt werden muss, falls Wette *I* gegenüber Wette *II* bevorzugt wird und umgekehrt. Insbesondere ist das oben beschriebene Antwortverhalten in jedem Fall nicht durch ein präzises Wahrscheinlichkeitsmaß P auf dem Grundraum $\Omega = \{rot, schwarz, gelb\}$ und das Paradigma des Maximierens des erwarteten Gewinnes beschreibbar:

Sind p_r, p_s, p_g die "Wahrscheinlichkeiten" für das Ziehen einer roten, schwarzen bzw. gelben Kugel,

so gilt für die erwarteten Gewinne E der vier Spiele:

$$\begin{aligned}E_I &= 100 \cdot p_r \\E_{II} &= 100 \cdot p_s \\E_{III} &= 100 \cdot p_r + 100 \cdot p_g \\E_{IV} &= 100 \cdot p_s + 100 \cdot p_g,\end{aligned}$$

so dass aus

$$E_I < E_{II}$$

immer

$$E_{III} = E_I + p_g < E_{II} + p_g = E_{IV}$$

folgt, d.h. es würde das Sure-thing Principle gelten. Dies ist aber im Widerspruch zum beschriebenen Antwortverhalten, es sei denn, die Bevorzugung von z.B. Spiel I gegenüber Spiel II ist in einem schwachen Sinne gemeint, d.h. es wird nur angenommen, dass das Spiel I mindestens so viel wert ist wie Spiel II . Dies ist aber scheinbar hier nicht der Fall. Auch die Annahme, dass die gegebenen Antworten einfach „irrational“ oder undurchdacht wären, liegt nicht auf der Hand. Ellsberg schreibt dazu:

“You might now pause to reconsider your replies. If you should repent of your violations - if you should decide that your choices implying conflicts with the axioms were 'mistakes' and that your 'real' preferences, upon reflection, involve no such inconsistencies - you confirm that the Savage postulates are, if not descriptive rules for you, your normative criteria in these situations. But this is by no means a universal reaction; on the contrary, it would be exceptional. Responses do vary. There are those who do not violate the axioms, or say they won't, even in these situations (e.g., G. Debreu, R. Schlaiffer, P. Samuelson); such subjects tend to apply the axioms rather than their intuition, and when in doubt, to apply some form of the Principle of Insufficient Reason. Some violate the axioms cheerfully, even with gusto (J. Marschak, N. Dalkey); others sadly but persistently, having looked into their hearts, found conflicts with the axioms and decided, in Samuelson's phrase¹, to satisfy their preferences and let the axioms satisfy themselves. Still others (H. Raiffa) tend, intuitively, to violate the axioms but feel guilty about it and go back into further analysis. The important finding is that, after rethinking all their 'offending' decisions in the light of the axioms, a number of people who are not only sophisticated but reasonable decide that they wish to persist in their choices. This includes people who previously felt a 'firstorder commitment' to the axioms, many of them surprised and some dismayed to find that they wished, in these situations, to violate the Sure-thing Principle. Since this group included L. J. Savage, when last tested by me

¹P. Samuelson, P. (1950). Probability and the Attempts to Measure Utility. The Economic Review. Tokyo, Japan. 169-70.

(I have been reluctant to try him again), it seems to deserve respectful consideration. ([10], S.655 f)

Dieses scheinbar „irrationale“ Antwortverhalten scheint also etwas tiefer zu liegen. In der Tat kann man aus dem Verhalten „irgendwelcher“ Personen nicht darauf schließen, dass ihr Verhalten „rational“ sei. Vielmehr ist der Begriff „Rationalität“ zunächst so unbestimmt, dass man nicht klar sagen kann, ob die gleichzeitige Bevorzugung von Spiel *I* zu Spiel *II* und Spiel *IV* zu Spiel *III* irrational ist. Jedenfalls ist die Argumentation, dass derartiges Verhalten irrational sei, weil es kein präzises Wahrscheinlichkeitsmaß gibt, das dieses Verhalten beschreibt, unhaltbar, denn es setzt bereits die Wahrscheinlichkeitsaxiome und damit die Gleichheit von Kauf- und Verkaufspreisen voraus (dies heißt jedoch nicht, dass es nicht andere Gründe geben kann, dieses Verhalten als irrational zu bezeichnen). Wir geben also im Folgenden die Annahme, dass Kauf- und Verkaufspreise identisch sind, auf und verwenden diese spieltheoretische Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Die spieltheoretische Interpretation hat den Vorteil, dass sie auch die anderen Interpretationen adaptieren kann: Habe ich Evidenz $p(E)$ (sei es aus Symmetrieüberlegungen heraus oder aus der Auswertung von statistischen Daten bzw. Schätzungen eines Limes bzw. Limes inferior einer Wahrscheinlichkeitsfolge) für das Vorliegen eines Ereignisses E , so wäre ich vermutlich auch bereit den Einsatz $p(E)$ auf das Spiel 1_E zu setzen (Principle of direct inference, siehe [37], S.33). Es ist also auch „externe Rationalität“ erreichbar, d.h. die Wahrscheinlichkeitszuordnung ist nicht nur in sich stimmig, sondern reflektiert auch eventuell vorhandene Evidenz und nicht nur den Glauben eines Subjektes (siehe dazu auch [37], S. 33 f). Diese Interpretation führt dann zu gegenüber der klassischen Theorie abgeschwächten „Rationalitätsforderungen“ (diese sind das Vermeiden sicheren Verlusts und die Kohärenz, siehe Definition 3.2.1 und Definition 3.2.3). Abschließend sei noch die Arbeit von Frank Hampel ([15]) erwähnt, die als Kompromiss zwischen subjektivistischem und frequentistischem Ansatz gesehen werden kann. Hier wird für das Binomialmodell bei n gegebenen Versuchen mit bekanntem Ausgang eine Prozedur zur Berechnung von Wetteinsätzen für zukünftige Ereignisse gegeben. Diese ist intersubjektiv nachvollziehbar (insbesondere werden keine prior beliefs benötigt, man startet mit totaler Ignoranz bezüglich des Parameters θ). Es gibt also schon konkrete Vorschläge für die Konstruktion „objektiver“ Wahrscheinlichkeiten, die als kohärente Wetteinsätze interpretiert werden können (klassische Konfidenzintervalle sind nicht immer kohärent). Wir kommen nun zum eigentlichen, mathematischen Teil dieser Diplomarbeit.

3. Kohärente Prävisionen

3.1. Definitionen

Definition 3.1.1. Ein Spiel (gamble) X über einem (nichtleeren) Ereignisraum Ω ist eine beschränkte Abbildung von Ω in die reellen Zahlen (beschränkt heißt, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|X(\omega)| \leq c$ für alle $\omega \in \Omega$ gibt). Ein $\omega \in \Omega$ beschreibt hier den wahren „Zustand der Welt“ und $X(\omega)$ den in diesem Fall gemachten Gewinn des Spiels X (in einer bestimmten Währung). Die Menge aller Spiele über Ω sei mit $\mathcal{L}(\Omega)$ bezeichnet.

Das Komplement eines Spiels X sei gegeben durch:

$$X^c : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto 1 - X(\omega).$$

Eine Menge M von Spielen über Ω heißt **punktweise beschränkt**, falls für alle $\omega \in \Omega$ die Menge $\{X(\omega) | X \in M\}$ beschränkt ist. Das Supremum und das Infimum (siehe Abschnitt 3.3) von M sind dann punktweise definiert :

$$\begin{aligned} \bigvee M : \Omega \in \mathbb{R} : \quad \omega &\mapsto \bigvee \{X(\omega) | X \in M\} \\ \bigwedge M : \Omega \in \mathbb{R} : \quad \omega &\mapsto \bigwedge \{X(\omega) | X \in M\}. \end{aligned}$$

Für Teilmengen $X \subseteq \Omega$ identifizieren wir X mit ihrer charakteristischen Funktion:

$$X = \mathbf{1}_X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in X \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und betrachten somit auch Teilmengen von Ω als Spiele. Die Menge aller Teilmengen von Ω sei mit 2^Ω bezeichnet. Der Schnitt bzw. die Vereinigung zweier Spiele X und Y ist definiert als:

$$\begin{aligned} X \cap Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega &\mapsto X(\omega) \cdot Y(\omega) \\ X \cup Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega &\mapsto ((X^c \cap Y^c)^c)(\omega) \\ &= 1 - (1 - X(\omega)) \cdot (1 - Y(\omega)) \\ &= 1 - (1 - Y(\omega) - X(\omega) + X(\omega) \cdot Y(\omega)) \\ &= X(\omega) + Y(\omega) - X(\omega) \cdot Y(\omega). \end{aligned}$$

Im Falle von $\{0, 1\}$ - wertigen Spielen, also Mengen, fallen das Komplement sowie Schnitt und Vereinigung mit den üblichen Definitionen zusammen. Weiterhin sind in diesem Fall die Operationen \cap und \wedge bzw. \cup und \vee identisch. Eigenschaften, wie zum Beispiel die Supremumtreue (siehe Definition 3.4.1) werden in diesem Fall auch als Vereinigungstreue bezeichnet. Da Spiele beschränkte Abbildungen sind existieren

$$\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega)$$

und

$$\sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$$

für ein Spiel X immer und werden mit $\inf X$ bzw. $\sup X$ abgekürzt. Für endlichen Grundraum $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ stellen wir ein Spiel $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ durch den Vektor $(X(\omega_1), \dots, X(\omega_n))$ dar und lassen gegebenenfalls in Graphiken die Klammern sowie die trennenden Kommas weg. Sind X und Y Spiele und λ eine reelle Zahl, so identifizieren wir λ mit dem Spiel

$$\lambda : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \lambda$$

und bezeichnen mit $X \cdot Y$ das Spiel

$$X \cdot Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto X(\omega) \cdot Y(\omega).$$

Wir schreiben $X \geq Y$, falls für alle $\omega \in \Omega$ die Ungleichung $X(\omega) \geq Y(\omega)$ gilt. Analoges gilt für die Relationen $>$, \leq und $<$. Für zwei Mengen M und N von Spielen und eine Konstante λ benutzen wir die Komplexschreibweisen

$$\lambda \cdot M := \{\lambda \cdot X \mid X \in M\}$$

und

$$M + N := \{X + Y \mid X \in M \ \& \ Y \in N\}.$$

Bemerkung 3.1.2. Die Menge $\mathcal{L}(\Omega)$ bildet mit der Addition

$$+ : \mathcal{L}(\Omega) \times \mathcal{L}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}(\Omega) : (X, Y) \mapsto X + Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto X(\omega) + Y(\omega)$$

und der Skalarmultiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{L}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}(\Omega) : (\lambda, X) \mapsto \lambda \cdot X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \lambda \cdot X(\omega)$$

einen linearen Raum (Vektorraum).

Um ein Spiel zu beschreiben, ist es oft hilfreich, sogenannte α -Schnitte zu betrachten:

Definition 3.1.3. Sei $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist der α -**Schnitt** von X definiert als $S_\alpha(X) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq \alpha\}$. Beachte, dass $S_\alpha(X)$ immer eine Menge ist.

Lemma 3.1.4. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathcal{L}(\Omega)$ gelten:

- (a) $S_\alpha(X \wedge Y) = S_\alpha(X) \wedge S_\alpha(Y)$.
- (b) $S_\alpha(X \vee Y) = S_\alpha(X) \vee S_\alpha(Y)$.
- (c) $S_\alpha(X) \cap S_\beta(Y) \subseteq S_{\alpha\beta}(X \cap Y)$ für $\alpha, \beta \geq 0$.
- (d) $S_\alpha(X) \vee S_\beta(Y) \subseteq S_{\alpha\wedge\beta}(X \vee Y)$.

(e) Falls $\text{Im}(X)$ und $\text{Im}(Y)$ Teilmengen des Intervalls $[0, 1]$ sind, gilt auch:

$$S_\alpha(X) \cup S_\beta(Y) \subseteq S_{\alpha \wedge \beta}(X \cup Y).$$

$$(f) S_{\alpha+\beta}(X+Y) \subseteq S_\alpha(X) \cup S_\beta(Y) \leq S_\alpha(X) + S_\beta(Y).$$

$$(g) S_\alpha(X) + S_\alpha(Y) = S_\alpha(X \wedge Y) + S_\alpha(X \vee Y).$$

$$(h) \alpha \leq \beta \implies S_\beta(X) \subseteq S_\alpha(X).$$

$$(i) X \leq Y \implies S_\alpha(X) \subseteq S_\alpha(Y).$$

Beweis:

$$(a) \omega \in S_\alpha(X \wedge Y) \iff (X \wedge Y)(\omega) \geq \alpha \iff X(\omega) \geq \alpha \text{ und } Y(\omega) \geq \alpha \iff \omega \in S_\alpha(X) \text{ und } \omega \in S_\alpha(Y) \iff \omega \in S_\alpha(X) \wedge S_\alpha(Y).$$

$$(b) \omega \in S_\alpha(X \vee Y) \iff (X \vee Y)(\omega) \geq \alpha \iff X(\omega) \geq \alpha \text{ oder } Y(\omega) \geq \alpha \iff \omega \in S_\alpha(X) \text{ oder } \omega \in S_\alpha(Y) \iff \omega \in S_\alpha(X) \vee S_\alpha(Y).$$

$$(c) \omega \in S_\alpha(X) \cap S_\beta(Y) \iff X(\omega) \geq \alpha \text{ und } Y(\omega) \geq \beta \implies X(\omega)Y(\omega) \geq \alpha\beta \implies \omega \in S_{\alpha\beta}(X \cap Y).$$

$$(d) \omega \in S_\alpha(X) \vee S_\beta(Y) \iff X(\omega) \geq \alpha \text{ oder } Y(\omega) \geq \beta \implies (X \vee Y)(\omega) \geq X(\omega) \geq \alpha \text{ oder } (X \vee Y)(\omega) \geq Y(\omega) \geq \beta \implies (X \vee Y)(\omega) \geq \alpha \wedge \beta \iff \omega \in S_{\alpha \wedge \beta}(X \vee Y).$$

$$(e) \omega \in S_\alpha(X) \cup S_\beta(Y) \iff X(\omega) \geq \alpha \text{ oder } Y(\omega) \geq \beta \implies X(\omega) + Y(\omega) - X(\omega) \cdot Y(\omega) \geq \alpha \text{ oder } X(\omega) + Y(\omega) - X(\omega) \cdot Y(\omega) \geq \beta \text{ (denn es gilt } Y(\omega) - X(\omega) \cdot Y(\omega) \geq 0 \text{ und } X(\omega) - X(\omega) \cdot Y(\omega) \geq 0) \iff (X \cup Y)(\omega) \geq \alpha \wedge \beta \iff \omega \in S_{\alpha \wedge \beta}(X \cup Y).$$

$$(f) \omega \in S_{\alpha+\beta}(X+Y) \iff X(\omega) + Y(\omega) \geq \alpha + \beta \implies X(\omega) \geq \alpha \text{ oder } Y(\omega) \geq \beta \implies \omega \in S_\alpha(X) \text{ oder } \omega \in S_\beta(Y) \implies \omega \in S_\alpha(X) \cup S_\beta(Y). \text{ Weiterhin gilt f\u00fcr beliebige Mengen } A, B: A + B = A \vee B + A \wedge B \geq A \vee B, \text{ denn f\u00fcr } \omega \in \Omega \text{ gilt: } (A + B)(\omega) = A(\omega) + B(\omega) = \max\{A(\omega), B(\omega)\} + \min\{A(\omega), B(\omega)\} = (A \vee B)(\omega) + (A \wedge B)(\omega). \text{ Also folgt die behauptete Ungleichung.}$$

$$(g) S_\alpha(X) + S_\alpha(Y) = S_\alpha(X) \wedge S_\alpha(Y) + S_\alpha(X) \vee S_\alpha(Y) = S_\alpha(X \wedge Y) + S_\alpha(X \vee Y).$$

$$(h) \text{ f\u00fcr } \alpha \leq \beta \text{ gilt: } \omega \in S_\beta(X) \implies X(\omega) \geq \beta \implies X(\omega) \geq \alpha \implies \omega \in S_\alpha(X).$$

$$(i) X \leq Y \ \& \ \omega \in S_\alpha(X) \implies Y(\omega) \geq X(\omega) \geq \alpha \implies \omega \in S_\alpha(Y).$$

■

Definition 3.1.5. Ein Spiel X heißt **einfach**, falls es einen endlichen Wertebereich besitzt. In diesem Fall gibt es eine eindeutige Darstellung

$$X = \sum_{i=0}^n \lambda_i \chi_i,$$

Dabei sind x_0, \dots, x_n die aufsteigend geordneten (verschiedenen) Werte, die X annimmt und die λ_i sind rekursiv definiert durch: $\lambda_0 = x_0$ und $\lambda_{k+1} = x_{k+1} - x_k$. Die χ_i sind die α -Schnitte von X : $\chi_i = S_{x_i}(X)$. Beachte, dass alle α -Schnitte jeweils ineinander enthalten sind und dass $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ sowie $\chi_0 = \Omega$ gilt.

Bemerkung 3.1.6. Ist ein einfaches Spiel X darstellbar als

$$X = \sum_{i=0}^n \lambda_i M_i$$

mit den Mengen $\Omega = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_n$, und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so ist diese Darstellung bereits die Standarddarstellung von X .

Lemma 3.1.7. Seien $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ ein einfaches Spiel und $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ die aufsteigend geordneten Elemente einer endlichen Menge $I \supseteq \text{Im}(X) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ sowie $\lambda_0 = x_0, \lambda_{i+1} = x_{i+1} - x_i, i = 0, \dots, n-1$. Dann ist X darstellbar als:

$$X = \sum_{i=0}^n \lambda_i S_{x_i}(X)$$

mit $S_{x_0}(X) = \Omega$.

Beweis: Betrachte für beliebiges $\omega \in \Omega$ dasjenige $k \in \{0, \dots, n\}$, für das $X(\omega) = x_k$ gilt. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i S_{x_i}(X) \right) (\omega) &= \sum_{i: X(\omega) \geq x_i} \lambda_i \\ &= x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_k - x_{k-1}) = x_k = X(\omega) \end{aligned}$$

und aus $I \supseteq \text{Im}(X)$ folgt $x_0 \leq \min X$ und somit $S_{x_0}(X) = \Omega$. ■

Lemma 3.1.8. Für jedes Spiel $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ existiert eine Folge X_n von einfachen Spielen, die bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ gegen X konvergiert:

$$X_n \rightarrow X \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis: Sei $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ beliebig. Da X beschränkt ist, existiert ein Intervall $[a, b]$ mit $[a, b] \supseteq \text{Im}(X)$. Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung des Intervalles $[a, b]$ in $n + 1$ Teilintervalle $I_k^n := [a + k \cdot d_n, a + (k + 1) \cdot d_n)$, $k = 0, \dots, n$ mit $d_n = \frac{b-a}{n+1}$. Definiere dann X_n durch

$$X_n(\omega) = a + k \cdot d_n \quad \text{falls } a + k \cdot d_n \leq X(\omega) < a + (k + 1) \cdot d_n.$$

Da X_n ein endlichen Wertebereich (nämlich $\{a + k \cdot d_n | k = 0, \dots, n\}$) besitzt, ist X_n einfach und da offensichtlich $|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq d_n = \frac{b-a}{n+1}$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt, folgt $\|X_n - X\|_\infty \leq d_n = \frac{b-a}{n+1} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. ■

Definition 3.1.9. ([9]) Sei I eine beliebige Indexmenge und $M := \{X_i | i \in I\}$ eine Klasse von Spielen über Ω . Dann heißt M **komonoton**, falls für beliebige $X, Y \in M$ und beliebige $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ gilt: $X(\omega_1) < X(\omega_2) \implies Y(\omega_1) \leq Y(\omega_2)$. Das heißt, zwei beliebige Spiele aus M sind auf beliebigen ω_1, ω_2 nie von entgegengesetzter strenger Monotonie.

Bemerkung 3.1.10. Zwei Spiele X, Y sind bereits komonoton, falls z.B. X konstant ist, denn dann gilt für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$: $X(\omega_1) < X(\omega_2)$ und $X(\omega_1) \leq X(\omega_2)$, was in jedem Fall die benötigte Implikation sicherstellt.

Lemma 3.1.11. ([9]) Für eine Klasse M von Mengen gilt: M komonoton $\iff M$ ist eine Kette bezüglich \subseteq , d.h. für beliebige $X, Y \in M$ gilt $X \subseteq Y$ oder $Y \subseteq X$.

Beweis: Da M nur Mengen, also $\{0, 1\}$ -wertige Spiele enthält gilt:

$$\begin{aligned} M \text{ komonoton} &\iff \forall X, Y \in M, \omega_1, \omega_2 \in \Omega : X(\omega_1) < X(\omega_2) \implies Y(\omega_1) \leq Y(\omega_2) \\ &\iff \forall X, Y \in M, \omega_1, \omega_2 \in \Omega : \omega_2 \in X \text{ und } \omega_1 \notin X \implies \omega_1 \notin Y \text{ oder } \omega_2 \in Y \\ &\iff \forall X, Y \in M : \neg(\exists \omega_1, \omega_2 \in \Omega : \omega_2 \in X \setminus Y \ \& \ \omega_1 \in Y \setminus X) \\ &\iff \forall X, Y \in M : X \subseteq Y \text{ oder } Y \subseteq X \\ &\iff M \text{ ist Kette bezüglich } \subseteq. \end{aligned}$$

Lemma 3.1.12. ([9]) Eine Klasse M von Spielen ist komonoton genau dann, wenn alle zugehörigen α -Schnitte komonoton sind (d.h. eine Kette bilden):

$$M = \{X_i | i \in I\} \text{ komonoton} \iff \{S_\alpha(X_i) | i \in I, \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ komonoton.}$$

Beweis:

„ \Rightarrow “: Seien $\omega_1, \omega_2 \in \Omega, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, X, Y \in M$ beliebig mit: $S_\alpha(X)(\omega_1) < S_\alpha(X)(\omega_2)$. Dann folgt: $S_\alpha(X)(\omega_1) = 0 < 1 = S_\alpha(X)(\omega_2)$, d.h. $X(\omega_1) < \alpha \leq X(\omega_2)$ und nach Voraussetzung folgt (*) : $Y(\omega_1) \leq Y(\omega_2)$. Zu zeigen ist, dass $S_\beta(X)(\omega_1) \leq S_\beta(Y)(\omega_2)$ gilt. Wäre dies nicht der Fall, so müsste notwendigerweise $Y(\omega_2) < \beta \leq Y(\omega_1)$ folgen. Dies steht aber im Widerspruch zu (*) und die Behauptung ist gezeigt.

„ \Leftarrow “: Seien $\omega_1, \omega_2 \in \Omega, X, Y \in M$ beliebig mit $X(\omega_1) < X(\omega_2)$. Für ein beliebiges α aus dem (nichtleeren) Intervall $(X(\omega_1), X(\omega_2))$ gilt $S_\alpha(X)(\omega_1) < S_\alpha(X)(\omega_2)$ und nach Voraussetzung folgt $S_\beta(Y)(\omega_1) \leq S_\beta(Y)(\omega_2)$ für beliebige $\beta \in \mathbb{R}$. Wähle nun $\beta := Y(\omega_1)$. Dann ergibt sich $Y(\omega_1) \geq \beta$ bzw. $(S_\beta(X))(\omega_1) = 1$ also auch $(S_\beta(X))(\omega_2) = 1$ bzw. $Y(\omega_2) \geq \beta = Y(\omega_1)$ und dies ist genau die zu zeigende Behauptung. ■

Definition 3.1.13. Eine **untere Prävision (lower prevision)** ist eine Abbildung von einer nicht-leeren Menge von Spielen (über dem gleichen Ereignisraum Ω) in die reellen Zahlen:

$$\underline{P} : \mathcal{L}(\Omega) \supseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Um den Grundraum Ω bzw. die Domäne von \underline{P} zu benennen, sagen wir auch, dass \underline{P} eine Prävision über Ω bzw. über \mathcal{H} sei. Für $\mathcal{H} = 2^\Omega$ heißt \underline{P} auch **untere Wahrscheinlichkeit**. Falls

$$\begin{aligned} \emptyset, \Omega &\in \mathcal{H}, \\ \underline{P}(\emptyset) &= 0, \\ \underline{P}(\Omega) &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\forall X, Y \in \mathcal{H} : X \leq Y \implies \underline{P}(X) \leq \underline{P}(Y)$$

gelten, so heißt \underline{P} **Kapazität (capacity)**. Ein Spiel X heißt **wünschenswert (desirable)**, falls $\underline{P}(X) > 0$ gilt oder falls X nichtnegativ aber ungleich dem Nullspiel ist (dh.: $\forall \omega \in \Omega : X(\omega) \geq 0$ & $\exists \omega \in \Omega : X(\omega) > 0$). Andernfalls heißt es **nicht wünschenswert**. Es heißt **fast wünschenswert (almost desirable)**, wenn für jedes $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ das Spiel $X + \delta$ wünschenswert ist. Für ein Spiel X beschreibt $\underline{P}(X)$ hier den „maximalen Kaufpreis“ des Spiels: Der Spieler ist geneigt, jeden Preis kleiner als $\underline{P}(X)$ für das Spiel X zu zahlen. Mit anderen Worten: für jedes $\mu < \underline{P}(X)$ ist das Spiel $X - \mu$ wünschenswert.

Die spieltheoretische Interpretation von \underline{P} legt, falls \mathcal{H} ein linearer Unterraum von $\mathcal{L}(\Omega)$ ist, folgende drei elementare Forderungen an eine untere Prävision nahe: Wenn ein Spiel X unabhängig von ω einen Gewinn $\geq c$ erbringt, dann sollte $X - c$ fast wünschenswert sein, denn für jedes $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bringt $X - c + \delta$ einen sicheren Gewinn $\geq \delta$. Es folgt also $\underline{P}(X) \geq c$ für jede untere Schranke von X und somit:

$$(P1) \quad \forall X \in \mathcal{K} : \quad \underline{P}(X) \geq \inf X.$$

Wir gehen (vereinfachend!) davon aus, dass der Gewinn und Verlust eines Spieles sowie der Gesamtwert des Spieles in der gleichen „Währung“ gemessen wird und dass diese Währung homogen ist: Für ein positives $\lambda \in \mathbb{R}$ liefert das Spiel $\lambda X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \lambda X(\omega)$ nach Definition für jedes ω den λ -fachen Gewinn/Verlust wie X , also sollte es auch das λ -fache Wert sein. Das heißt also:

$$(P2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}, X \in \mathcal{K} : \quad \underline{P}(\lambda X) = \lambda \underline{P}(X).$$

Wenn zwei Spiele $X, Y \in \mathcal{K}$ unabhängig voneinander wünschenswert sind, dann sollte es auch wünschenswert sein, beide Spiele zugleich zu spielen. Wenn ich für X jeden Preis $< \underline{P}(X)$ und für Y jeden Preis $< \underline{P}(Y)$ bezahlen würde, wäre ich auch bereit jeden Preis $< \underline{P}(X) + \underline{P}(Y)$ für das gleichzeitige Spielen von X und Y zahlen. Da der Gewinn beider Spiele gleich $X(\omega) + Y(\omega)$ ist, kann das gleichzeitige Spielen beider Spiele durch das Spiel $X + Y$ ausgedrückt werden und es folgt:

$$(P3) \quad \forall X, Y \in \mathcal{K} : \quad \underline{P}(X + Y) \geq \underline{P}(X) + \underline{P}(Y).$$

Das in (P3) im Allgemeinen keine Gleichheit gilt, soll folgendes Beispiel zeigen:

Gegeben sei eine Urne mit $N = 100$ Kugeln. Es wird einmal eine Kugel gezogen und festgestellt, ob sie rot ist oder nicht. Der Ereignisraum ist also $\Omega = \{\omega_r, \omega_{\bar{r}}\}$ wobei ω_r für eine rote gezogene Kugel stehen soll. Es wäre nun durchaus rational, $\underline{P}(\{\omega_r\}) = 0$ zu setzen, da es sein kann, dass die Urne keine roten Kugeln enthält. Ebenso rational ist es, $\underline{P}(\{\omega_{\bar{r}}\}) = 0$ zu setzen, da die Urne genausogut nur aus roten Kugeln bestehen kann. Es ist aber trotzdem irrational, $\underline{P}(\{\omega_r\} + \{\omega_{\bar{r}}\}) = \underline{P}\{\Omega\} = c < 1$ zu setzen, denn unabhängig von der Farbzusammensetzung der Kugeln werde ich das zusammengesetzte Spiel immer gewinnen, also unabhängig von ω immer eine Einheit Gewinn erhalten. Folglich sollte ich jeden Preis < 1 akzeptieren. Da ich nicht mehr als eine Einheit gewinnen kann, würde ich auch nicht mehr als eine Einheit bezahlen wollen und somit gilt:

$$1 = \underline{P}(\{\omega_r\} + \{\omega_{\bar{r}}\}) > \underline{P}(\{\omega_r\}) + \underline{P}(\{\omega_{\bar{r}}\}) = 0 + 0.$$

Man könnte einwenden, dass man $\underline{P}(\{\omega_r\}) = \underline{P}(\{\omega_{\bar{r}}\}) = 0.5$ wählen sollte, da es zwei Möglichkeiten gibt, zwischen denen man keine Präferenzen hat: die gezogene Kugel ist rot oder sie ist nicht rot. Diese Begründung ist aber abhängig von der Modellierung des Ereignisraumes und somit inadäquat: Man hätte die Farbe der Kugel auch mit dem Ereignisraum $\Omega = \{\text{rot, grün, weder rot noch grün}\}$ oder aber auch mit dem Ereignisraum $\Omega = \{\text{rot, grün, blau, weder rot noch grün noch blau}\}$ modellieren können und würde kleinere Wahrscheinlichkeiten für eine rote Kugel (und größere Wahrscheinlichkeiten für eine nichtrote Kugel) erhalten und somit wäre die Wahl von $\underline{P}(\{\omega_r\}) = \underline{P}(\{\omega_{\bar{r}}\}) = 0.5$ willkürlich.

Bemerkung 3.1.14. Die Axiome **(P1)** bis **(P3)** können auch in der Sprache von wünschenswerten Spielen ausgedrückt werden (siehe [37] S.64 bzw. S.493):

(D0) falls $\sup X < 0$ gilt, so ist X nicht wünschenswert.

(D1) falls $\inf X > 0$ gilt, so ist X wünschenswert.

(D2) falls X wünschenswert ist und λ eine positive reelle Konstante, so ist das Spiel $\lambda \cdot X$ ebenfalls wünschenswert.

(D3) Sind X und Y wünschenswert, so ist es auch $X + Y$.

3.2. Axiome der Kohärenz

Definition 3.2.1. ([37], S.68)

Sei \underline{P} eine untere Prävision über einer beliebigen Domäne $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$. Für ein Spiel $X \in \mathcal{K}$ heißt das Spiel $G(X) := X - \underline{P}(X)$ das **Marginalspiel** bezüglich X .

$\underline{P}(X)$ **vermeidet sicheren Verlust (avoids sure loss)**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}^+$ und für alle Spiele $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{K}$ gilt:

$$\sup \sum_{j=1}^n G(X_j) \geq 0.$$

\underline{P} **macht sicheren Verlust (incurs sure loss)**, wenn \underline{P} nicht sicheren Verlust vermeidet, d.h. wenn es Spiele X_1, \dots, X_n gibt mit:

$$\sup \sum_{j=1}^n G(X_j) < 0.$$

Die Menge aller Prävisionen über demselben Grundraum Ω aber mit beliebiger nichtleerer Domäne wird mit $ASL(\Omega)$ bezeichnet.

Die Eigenschaft sicheren Verlust zu vermeiden folgt aus den Axiomen **(D0)** bis **(D3)**:

Für jedes $\delta > 0$ sind die Spiele $G(X_j) + \delta$ wünschenswert. Mit Axiom **(D3)** und vollständiger Induktion über n folgt, dass auch das Spiel $\sum_{j=1}^n (G(X_j) + \delta)$ wünschenswert ist und mit

(D0) folgt $\sup \sum_{j=1}^n (G(X_j) + \delta) \geq 0$. Da δ beliebig klein gemacht werden kann, folgt schließlich

$$\sup \sum_{j=1}^n G(X_j) \geq 0.$$

Definition 3.2.1 kann auch geschrieben werden als $\sup \sum_{j=1}^n X_j \geq \sum_{j=1}^n \underline{P}(X_j)$ für alle beliebigen $n \in \mathbb{N}^+$ und $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{K}$. Für $n = 1$ heißt dies z.B., dass man nicht dazu bereit sein sollte, mehr für ein Spiel zu zahlen, als man maximal zurückgewinnen kann.

Lemma 3.2.2. ([37], S.69)

Für eine untere Prävision \underline{P} gilt:

(a) \underline{P} vermeidet sicheren Verlust genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{N}^+$, $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{K}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $\sup \sum_{j=1}^n \lambda_j G(X_j) \geq 0$.

(b) Falls die Menge $\{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$ für alle $X \in \mathcal{K}$ endlich ist, dann gilt:

\underline{P} vermeidet sicheren Verlust genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{N}^+$, $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{K}$ ein $\omega \in \Omega$ existiert mit: $\sum_{j=1}^n G(X_j)(\omega) \geq 0$.

Beweis:

(a), „ \Rightarrow “: Sei

$$\sup \sum_{j=1}^n \lambda_j G(X_j) = -\delta < 0 \quad (*)$$

für beliebige $\delta > 0, n \in \mathbb{N}^+, X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Da die X_j beschränkt sind existiert ein $\alpha > 0$ mit $|G(X_j)(\omega)| \leq \alpha$ für alle $\omega \in \Omega$ und alle $1 \leq j \leq n$. Setze $\varepsilon := \frac{\delta}{2n\alpha}$. Wähle nun für alle j ein rationales ρ_j mit: $\lambda_j \leq \rho_j \leq \lambda_j + \varepsilon$. Dann folgt:

$$\sum_{j=1}^n \rho_j G(X_j) \leq \sum_{j=1}^n (\lambda_j G(X_j) + \varepsilon \alpha) \leq -\delta + n\varepsilon \alpha = -\frac{\delta}{2}.$$

Da nun alle ρ_j nichtnegativ und rational sind, können wir die gesamte Gleichung mit dem Hauptnenner k der ρ_j durchmultiplizieren und erhalten

$$\sup \sum_{j=1}^n m_j G(X_j) \leq -\frac{k\delta}{2} < 0,$$

wobei die m_j natürliche Zahlen sind. Das heißt aber, dass \underline{P} sicheren Verlust macht, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Also war die Annahme (*) falsch. Da δ beliebig war, folgt die Behauptung.

„ \Leftarrow “: Dies folgt direkt aus der Definition, wenn alle $\lambda_j = 1$ gewählt werden.

(b), „ \Rightarrow “: Sei $n \in \mathbb{N}^+, X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}$ mit $Y(\omega) := \sum_{j=1}^n G(X_j)(\omega) < 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Da alle X_j nur endlich viele Werte annehmen, nimmt auch $G(X_j)$ und somit auch Y nur endlich viele Werte an. Daraus folgt aber $\sup Y = \max Y < 0$, was im Widerspruch zur Annahme, dass \underline{P} sicheren Verlust vermeidet, steht. Also folgt die Behauptung.

„ \Leftarrow “: Für beliebige $n \in \mathbb{N}^+, X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}$ folgt sofort:

$$\sup \sum_{j=1}^n G(X_j) \geq \sum_{j=1}^n G(X_j)(\omega) \geq 0 \text{ mit dem entsprechenden } \omega \text{ der Voraussetzung und } \underline{P} \text{ vermeidet somit sicheren Verlust.}$$

■

Definition 3.2.3. ([37], S.73) Sei $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ beliebig. Eine untere Prävision \underline{P} heißt **kohärent (coherent)**, falls für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und beliebige Spiele $X_0, X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}$ gilt:

$$\sup[\sum_{j=1}^n G(X_j) - mG(X_0)] \geq 0.$$

Um diese Definition zu rechtfertigen betrachten wir drei verschiedene Fälle (der Fall $m = n = 0$ ist trivial):

(a) $m = 0$: Kohärenz reduziert sich hier zur Vermeidung sicheren Verlustes, die, wie schon gezeigt wurde, aus **(D0)** bis **(D3)** folgt.

- (b) $m > 0$ und $n = 0$: Hier folgt die Kohärenzbedingung ebenfalls aus **(D0)** bis **(D3)** : Es ist $\sup(-G(X_0)) \geq 0$ also $-\inf G(X_0) \geq 0$ bzw. $\underline{P}(X_0) \geq \inf X_0$ für jedes $X_0 \in \mathcal{K}$ zu zeigen. Es ist also zu zeigen, dass jedes Spiel $X_0 - \mu$ mit $\mu < \inf X_0$ wünschenswert ist. Dies folgt aber aus **(D1)** , denn für derartige Spiele gilt $\inf[X_0 - \mu] > \mu - \mu = 0$.
- (c) $m > 0$ und $n > 0$: Sei die Kohärenzbedingung für bestimmte Spiele X_j nicht erfüllt, d.h. es gilt $\sup[\sum_{j=1}^n G(X_j) - mG(X_0)] < 0$. Dies bedeutet weiterhin, dass ein positives δ mit $\sum_{j=1}^n [G(X_j) + \delta] \leq m[G(X_0) - \delta]$ existiert. Das Spiel $\sum_{j=1}^n [G(X_j) + \delta]$ ist wünschenswert, da alle $G(X_j) + \delta$ wünschenswert sind. Deshalb ist erst recht das Spiel $m[G(X_0) - \delta]$ bzw. das Spiel $[G(X_0) - \delta] = X_0 - (\underline{P}(X_0) + \delta)$ wünschenswert (dies folgt aus **(D3)**) . Dies bedeutet aber, dass die Prävision \underline{P} impliziert, dass das Spiel X_0 jeden Preis kleiner als $\underline{P}(X_0) + \delta$ wert ist, so dass der ursprünglich angesetzte maximale Kaufpreis $\underline{P}(X_0)$ von X_0 zu klein ist.

Bemerkung 3.2.4. Falls \mathcal{K} ein linearer Unterraum von $\mathcal{L}(\Omega)$ ist, so ist die Definition der Kohärenz äquivalent zu den Axiomen **(P1)** bis **(P3)**. Zum Beweis siehe [37], S.75.

Definition 3.2.5. Sei \underline{P} eine Prävision über $\mathcal{L}(\Omega)$. \underline{P} heißt **linear**, falls für alle $X, Y \in \mathcal{L}(\Omega)$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{(P2)'} \quad & P(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot P(X) \\ \text{(P3)'} \quad & \underline{P}(X + Y) = \underline{P}(X) + \underline{P}(Y) \\ \text{(P4)} \quad & X \geq 0 \implies P(X) \geq 0 \\ \text{(P5)} \quad & P(\mathbf{1}_\Omega) = 1. \end{aligned}$$

Ist \underline{P} nur auf $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{L}(\Omega)$ definiert, so heißt \underline{P} **linear**, falls \underline{P} zu einer linearen Prävision über $\mathcal{L}(\Omega)$ erweitert werden kann. Die Menge aller linearen Prävisionen über $\mathcal{L}(\Omega)$ sei mit $\mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnet. Für endliches Ω ist eine lineare Prävision nichts anderes als ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** nach Kolmogorov ([19]). Ist Ω dagegen unendlich, so ist eine lineare Prävision im Gegensatz zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß nicht notwendigerweise σ -additiv.

Bemerkung 3.2.6. Lineare Prävisionen sind also positive lineare Funktionale mit Norm 1. Außerdem sind sie insbesondere kohärent und haben damit alle Eigenschaften aus Lemma 3.2.15 (zum Beweis siehe [37], S.86 ff).

Definition 3.2.7. ([37],S.122) Sei $\underline{P} : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ eine untere Prävision, die sicheren Verlust vermeidet. Die **natürliche Extension** von \underline{P} ist definiert als:

$$\begin{aligned} \underline{P}^\circ \quad & : \quad \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \\ X \quad & \mapsto \bigvee \{ \alpha \mid X - \alpha \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i G(\chi_i) \text{ für geeignete } n \in \mathbb{N}^+, \chi_i \in \mathcal{K}, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \alpha \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.2.8. Da \underline{P} nach Voraussetzung sicheren Verlust vermeidet, gilt für α mit

$$X - \alpha \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i G(\chi_i)$$

die Ungleichung

$$\sup_{\omega \in \Omega} [X - \alpha] \geq \sup_{\omega \in \Omega} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i G(\chi_i) \right] \geq 0,$$

also auch $\alpha \leq \sup X$ und schließlich $\underline{P}^\circ(X) \leq \sup X < \infty$.

Somit ist \underline{P}° wohldefiniert.

Die Definition der natürlichen Extension kann auch als

$$\underline{P}^\circ : \mathcal{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \bigvee X \downarrow^{\underline{P}}$$

mit

$$X \downarrow^{\underline{P}} := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(\chi_i) + \lambda_0 \mid n \in \mathbb{N}^+, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{X}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X \right\}$$

dargestellt werden, denn es wird das Supremum über dieselbe Menge gebildet, da mit

$$\lambda_0 := - \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(\chi_i) + \alpha \text{ bzw. } \alpha := \lambda_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(\chi_i) \text{ die Äquivalenz}$$

$$\begin{aligned} X - \alpha \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i G(\chi_i) &\iff X \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(\chi_i) + \alpha \\ &\iff X \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \quad \& \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(\chi_i) + \lambda_0 = \alpha \end{aligned}$$

gilt. In der Definition von $X \downarrow^{\underline{P}}$ können auch nur rationale $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ betrachtet werden, ohne dass sich die natürliche Extension ändert:

Sei $\tilde{X} \downarrow^{\underline{P}}$ definiert als:

$$\tilde{X} \downarrow^{\underline{P}} := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(\chi_i) + \lambda_0 \mid n \in \mathbb{N}^+, \lambda_0 \in \mathbb{Q}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{X}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X \right\}.$$

Für reelle $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ mit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X$$

existieren rationale Folgen $\tilde{\lambda}_1^k, \dots, \tilde{\lambda}_n^k, k \in \mathbb{N}$ mit:

$$\tilde{\lambda}_i^k \leq \lambda_i \quad i = 0, \dots, n, \quad k \in \mathbb{N}$$

und

$$\tilde{\lambda}_i^k \rightarrow \lambda_i \quad \text{für } k \rightarrow \infty, \quad i = 0, \dots, n.$$

Daraus folgt nun

$$\sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i^k + \tilde{\lambda}_0^k \leq X, \quad k \in \mathbb{N}$$

und

$$\sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i^k P(\chi_i) + \tilde{\lambda}_0^k \rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\chi_i) + \lambda_0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Also gilt:

$$\bigvee_{X \downarrow} P = \bigvee_{\tilde{X} \downarrow} P.$$

Definition 3.2.9. Seien \underline{P} und \underline{Q} untere Prävisionen und $\mathcal{H} \subseteq \text{dom}(\underline{P}) \cap \text{dom}(\underline{Q})$. Dann wird \underline{P} von \underline{Q} auf \mathcal{H} **dominiert** (kurz: $\underline{P} \leq_{\mathcal{H}} \underline{Q}$), falls für alle $X \in \mathcal{H}$ gilt: $\underline{P}(X) \leq \underline{Q}(X)$. Für Prävisionen $\underline{P}, \underline{Q}$ mit den Domänen \mathcal{H} bzw. \mathcal{H}' schreiben wir $\underline{P} \leq \underline{Q}$, falls $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}'$ und $\underline{P}(X) \leq \underline{Q}(X)$ für alle $X \in \mathcal{H}$ gilt.

Bemerkung 3.2.10. Die Relationen $\leq_{\mathcal{H}}$ (mit festem \mathcal{H}) und \leq sind in der Tat Ordnungsrelationen auf dem Raum aller Prävisionen über Ω .

Lemma 3.2.11. ([37], S.123) Sei $\underline{P} : \emptyset \neq \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ eine untere Prävision, die sicheren Verlust vermeidet. Dann hat die natürliche Extension \underline{P}^\diamond folgende Eigenschaften:

- (a) $\forall X \in \mathcal{L}(\Omega) : \inf X \leq \underline{P}^\diamond(X) \leq \sup X$
- (b) \underline{P}^\diamond ist eine kohärente untere Prävision auf $\mathcal{L}(\Omega)$
- (c) \underline{P}^\diamond dominiert \underline{P} auf \mathcal{H} , d.h. $\forall X \in \mathcal{H} : \underline{P}^\diamond(X) \geq \underline{P}(X)$
- (d) $[\forall X \in \mathcal{H} : \underline{P}^\diamond(X) = \underline{P}(X)] \iff \underline{P}$ ist kohärent
- (e) \underline{P}^\diamond ist die kleinste kohärente untere Prävision, die \underline{P} auf \mathcal{H} dominiert, d.h. für alle kohärenten \underline{Q} mit Domäne $\mathcal{H}' \supseteq \mathcal{H}$ und $\underline{P} \leq_{\mathcal{H}} \underline{Q}$ folgt $\underline{P}^\diamond \leq_{\mathcal{H}'} \underline{Q}$.
- (f) Für kohärentes \underline{P} ist \underline{P}^\diamond die kleinste kohärente Prävision, die \underline{P} auf $\mathcal{L}(\Omega)$ fortsetzt.

Beweis:

- (a) Für $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ folgt mit einem beliebigen $Y \in \mathcal{H} : 0 \cdot Y + \inf X \leq X$ und somit $\underline{P}^\diamond(X) \geq 0 \cdot \underline{P}(Y) + \inf X = \inf X$. Die andere Ungleichung wurde schon in Bemerkung 3.2.8 gezeigt.

(b) Da $\mathcal{L}(\Omega)$ ein linearer Raum ist, zeigen wir, dass die Axiome **(P1)** bis **(P3)** gelten. **(P1)** folgt aus Aussage (a). Nun zu **(P2)**:

Für beliebiges $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ und $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist $\underline{P}^\circ(\beta X) = \beta \underline{P}^\circ(X)$ zu zeigen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \beta(X \downarrow^{\underline{P}}) &= \{ \beta(\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(\chi_i) + \lambda_0) \mid n \in \mathbb{N}^+, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{X}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X \} \\ &= \{ \sum_{i=1}^n \beta \lambda_i \underline{P}(\chi_i) + \beta \lambda_0 \mid n \in \mathbb{N}^+, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{X}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X \} \\ &= \{ \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i \underline{P}(\chi_i) + \tilde{\lambda}_0 \mid n \in \mathbb{N}^+, \tilde{\lambda}_0 \in \mathbb{R}, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{X}, \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i \chi_i + \tilde{\lambda}_0 \leq \beta X \} \\ &= (\beta X \downarrow^{\underline{P}})^{\underline{P}} \end{aligned}$$

und somit folgt $\underline{P}^\circ(\beta X) = \beta \underline{P}^\circ(X)$. Es bleibt noch **(P3)** zu zeigen:

Seien $X, Y \in \mathcal{L}(\Omega)$ beliebig. Da aus

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 &\leq X \\ \text{und} \\ \sum_{i=1}^m \mu_i \nu_i + \mu_0 &\leq Y \\ \text{immer} \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 + \sum_{i=1}^m \mu_i \nu_i + \mu_0 &\leq X + Y \end{aligned}$$

folgt, gilt die Inklusion

$$X \downarrow^{\underline{P}} + Y \downarrow^{\underline{P}} \subseteq (X + Y) \downarrow^{\underline{P}}$$

und es ergibt sich:

$$\underline{P}^\circ(X + Y) = \bigvee (X + Y) \downarrow^{\underline{P}} \geq \bigvee (X \downarrow^{\underline{P}} + Y \downarrow^{\underline{P}}) = \bigvee X \downarrow^{\underline{P}} + \bigvee Y \downarrow^{\underline{P}} = \underline{P}^\circ(X) + \underline{P}^\circ(Y).$$

(c) Da $1 \cdot X + 0 \leq X$ gilt, folgt für beliebiges $X \in \mathcal{L}(\Omega)$: $\underline{P}^\circ(X) \geq 1 \cdot \underline{P}(X) + 0 = \underline{P}(X)$.

(d) „ \implies “: Wenn \underline{P} auf \mathcal{X} mit \underline{P}° übereinstimmt, ist nach (b) \underline{P} auf \mathcal{X} kohärent.

„ \impliedby “: Für $n \in \mathbb{N}^+$, $\lambda_0 \in \mathbb{Q}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $\chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{X}$ mit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X \tag{*}$$

ist die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(\chi_i) + \lambda_0 \leq \underline{P}(X)$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^n k_i \underline{P}(\chi_i) + k_0 \leq m \underline{P}(X)$$

zu zeigen, wobei m der Hauptnenner der λ_i und $k_i := \lambda_i \cdot m \in \mathbb{N}$ ist. Da \underline{P} kohärent ist, gilt

$$\begin{aligned} & \sup\left[\sum_{i=1}^n k_i G(\chi_i) - mG(X)\right] \\ &= \sup\left[\sum_{i=1}^{k_1} G(\chi_1) + \dots + \sum_{i=1}^{k_n} G(\chi_n) - mG(X)\right] \geq 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun mit (*):

$$0 \geq \sup\left[\sum_{i=1}^n k_i \chi_i + k_0 - mX\right] = \sup\left[\sum_{i=1}^n k_i \chi_i - mX\right] + k_0 \geq \sum_{i=1}^n k_i \underline{P}(\chi_i) - m \underline{P}(X) + k_0$$

also

$$\sum_{i=1}^n k_i \underline{P}(\chi_i) + k_0 \leq m \underline{P}(X).$$

(e) Sei Q eine weitere kohärente Prävision mit Domäne $\mathcal{K}' \supseteq \mathcal{K}$ und $\underline{P} \leq_{\mathcal{K}} Q$. Dann folgt aus der Definition der natürlichen Extension: $\underline{P}^\diamond \leq (Q|_{\mathcal{K}})^\diamond \leq Q^\diamond$ und für $X \in \mathcal{K}'$ folgt mit (d): $\underline{P}^\diamond(X) \leq (Q|_{\mathcal{K}})^\diamond(X) \leq Q^\diamond(X) = Q(X)$.

(f) folgt aus (d) und (e). ■

Definition 3.2.12. Eine kohärente untere Prävision $\underline{P} : \mathcal{L}(\Omega) \supseteq \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt **wesentliche Domäne** $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$, falls gilt:

$$(\underline{P}|_{\mathcal{K}'})^\diamond = \underline{P}^\diamond.$$

Beachte, dass in diesem Fall für $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}'' \subseteq \mathcal{K}$ die Prävision \underline{P} wegen der Gleichheit

$$\underline{P}^\diamond = (\underline{P}|_{\mathcal{K}'})^\diamond \leq (\underline{P}|_{\mathcal{K}''})^\diamond \leq \underline{P}^\diamond$$

auch wesentliche Domäne \mathcal{K}'' besitzt.

Bemerkung 3.2.13. Eine kohärente untere Prävision $\underline{P} : \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ mit wesentlicher Domäne \mathcal{K} besitzt auch die wesentliche Domäne $\mathcal{K}' := \{\chi - \inf \chi \mid \chi \in \mathcal{K}\} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)_{\geq 0}$, denn für $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ gilt mit $\tilde{\chi}_i = \chi_i - \inf \chi_i$ und $\tilde{\lambda}_0 = \sum_{i=1}^n \inf \chi_i + \lambda_0$ (siehe dazu auch Lemma 3.2.15

(c)):

$$\begin{aligned} X_{\downarrow}^{\underline{P}|_{\mathcal{K}}} &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(\chi_i) + \lambda_0 \mid n \in \mathbb{N}^+, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{K}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(\chi_i - \inf \chi_i) + \inf \chi_i + \lambda_0 \mid n \in \mathbb{N}^+, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{K}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(\tilde{\chi}_i) + \tilde{\lambda}_0 \mid n \in \mathbb{N}^+, \tilde{\lambda}_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \tilde{\chi}_1, \dots, \tilde{\chi}_n \in \mathcal{K}', \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{\chi}_i + \tilde{\lambda}_0 \leq X \right\} \\ &= X_{\downarrow}^{\underline{P}|_{\mathcal{K}'}}. \end{aligned}$$

Definition 3.2.14. Eine **obere Prävision** \bar{P} ist ebenfalls eine Abbildung von einer Menge von Spielen über Ω in die reellen Zahlen und wird als „minimaler Verkaufspreis“ eines Spiels interpretiert. Die zu einer unteren Prävision $\underline{P} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ zugeordnete **duale Prävision**

$$\bar{P} := \underline{P}^\partial : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} : X \mapsto -\underline{P}(-X)$$

\bar{P} heißt **kohärent (als obere Prävision)**, falls die untere Prävision \underline{P}^∂ kohärent ist.

3.2.1. Elementare Eigenschaften kohärenter unterer Prävisionen

Hier sollen kurz einige Eigenschaften kohärenter Prävisionen aufgelistet werden. Einige dieser Eigenschaften werden später benötigt.

Lemma 3.2.15. Sei $\underline{P} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ eine kohärente untere Prävision und $\bar{P} : -\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} : X \mapsto -\underline{P}(-X)$ ihre zugehörige duale obere Prävision sowie $X, X_1, \dots, X_n, Y \in \mathcal{X}$. Falls die entsprechenden Ausdrücke definiert sind, gelten:

$$(a) \inf X \leq \underline{P}(X) \leq \bar{P}(X) \leq \sup X$$

$$(b) \forall \mu \in \mathbb{R} : \underline{P}(\mu) = \bar{P}(\mu) = \mu$$

$$(c) \forall \mu \in \mathbb{R} : \underline{P}(X + \mu) = \underline{P}(X) + \mu; \quad \bar{P}(X + \mu) = \bar{P}(X) + \mu$$

$$(d) \underline{P}(X) + \underline{P}(Y) \leq \underline{P}(X + Y) \leq \underline{P}(X) + \bar{P}(Y) \leq \bar{P}(X + Y) \leq \bar{P}(X) + \bar{P}(Y)$$

$$(e) \underline{P}(X) + \bar{P}(-X) = 0; \quad \underline{P}(X) + \bar{P}(X^c) = 1$$

$$(f) \forall \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \underline{P}(\lambda X) = \lambda \underline{P}(X); \quad \bar{P}(\lambda X) = \lambda \bar{P}(X)$$

$$(g) \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda \underline{P}(X) + (1 - \lambda) \underline{P}(Y) \leq \underline{P}(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \underline{P}(X) + (1 - \lambda)\bar{P}(Y) \\ \leq \bar{P}(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \bar{P}(X) + (1 - \lambda)\bar{P}(Y)$$

$$(h) \underline{P}(X) \leq \underline{P}(|X|); \quad \bar{P}(X) \leq \bar{P}(|X|)$$

$$(i) |\underline{P}(X) - \underline{P}(Y)| \leq \bar{P}(|X - Y|) \leq \|X - Y\|_{\infty}; \quad |\bar{P}(X) - \bar{P}(Y)| \leq \bar{P}(|X - Y|) \leq \|X - Y\|_{\infty}$$

$$(j) \underline{P}(|X + Y|) \leq \underline{P}(|X|) + \bar{P}(|Y|); \quad \bar{P}(|X + Y|) \leq \bar{P}(|X|) + \bar{P}(|Y|)$$

$$(k) \underline{P}(X \vee Y) + \underline{P}(X \wedge Y) \leq \underline{P}(X) + \bar{P}(Y) \leq \bar{P}(X \vee Y) + \bar{P}(X \wedge Y)$$

$$(l) \underline{P}(X) + \underline{P}(Y) \leq \underline{P}(X \vee Y) + \bar{P}(X \wedge Y) \leq \bar{P}(X) + \bar{P}(Y)$$

$$(m) \underline{P}(X) + \underline{P}(Y) \leq \underline{P}(X \wedge Y) + \bar{P}(X \vee Y) \leq \bar{P}(X) + \bar{P}(Y)$$

$$(n) \text{ falls } \bar{P}(|X_n - X|) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty, \text{ so folgt } \underline{P}(X_n) \rightarrow \underline{P}(X) \text{ und } \bar{P}(X_n) \rightarrow \bar{P}(X).$$

(o) Die Konvexkombination kohärenter Prävisionen mit gleicher Domäne ist kohärent.

(p) Der punktweise Grenzwert und das punktweise Infimum von kohärenten Prävisionen mit gleicher Domäne ist kohärent.

(q) Die Konvexkombination k -monotoner Prävisionen (siehe Definition 3.4.1) mit gleicher Domäne ist k -monoton.

(r) Der punktweise Grenzwert von k -monotonen Prävisionen mit gleicher Domäne ist k -monoton.

(s) falls $\emptyset, \Omega \in \mathcal{X}$ gilt, so ist \underline{P} eine Kapazität.

(t) $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$\sum_{i=1}^n \underline{P}(X_i) = \underline{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(X_i) = \underline{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right).$$

Beweis: Für die Punkte (a) bis (p) siehe [37], S.76 ff. Nun zu den verbleibenden Punkten:

(q): Seien \underline{P} und \underline{Q} k -monotone Prävisionen und λ aus $[0, 1]$. Dann folgt für $\underline{Z} := \lambda \cdot \underline{P} + (1 - \lambda) \cdot \underline{Q}$ und beliebige $X_1, \dots, X_k \in \text{dom}(\underline{P})$ sofort:

$$\begin{aligned} \underline{Z}\left(\bigvee_{i=1}^k X_k\right) &= \lambda \cdot \underline{P}\left(\bigvee_{i=1}^k X_k\right) + (1 - \lambda) \underline{Q}\left(\bigvee_{i=1}^k X_k\right) \\ &\geq \lambda \cdot \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \underline{P}\left(\bigwedge_{i \in T} X_i\right) + (1 - \lambda) \cdot \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \underline{Q}\left(\bigwedge_{i \in T} X_i\right) \\ &= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \underline{Z}\left(\bigwedge_{i \in T} X_i\right). \end{aligned}$$

(r): Konvergiere die Folge (\underline{P}_n) punktweise gegen \underline{P} , d.h. für alle $X \in \text{dom}(\underline{P})$ konvergiere $(\underline{P}_n(X))$ gegen $\underline{P}(X)$. Da alle \underline{P}_n k -monoton sind gilt für beliebige X_1, \dots, X_k und $n \in \mathbb{N}$:

$$\underline{P}_n\left(\bigvee_{i=1}^k X_k\right) \geq \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \underline{P}_n\left(\bigwedge_{i \in T} X_i\right).$$

Da sich diese Ungleichung zwischen zwei reellen Zahlenfolgen auf den Grenzwert der Zahlenfolgen überträgt ist auch der punktweise Grenzwert \underline{P} k -monoton.

(s): Seien $X, Y \in \mathcal{H}$ mit $X \leq Y$. Dann gilt $Y - X \geq 0$ und mit (a) und (d) folgt:

$$\underline{P}(Y) = \underline{P}(X + Y - X) \geq \underline{P}(X) + \underline{P}(Y - X) \geq \underline{P}(X) + \inf(Y - X) \geq \underline{P}(X).$$

(t): Gelte

$$\sum_{i=1}^n \underline{P}(X_i) = \underline{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$$

und seien o.B.d.A. die λ_i so geordnet, dass $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ gilt. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(X_i) &= \lambda_1 \cdot \sum_{i=1}^n \underline{P}(X_i) + \sum_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1) \cdot \underline{P}(X_i) \\
 &= \lambda_1 \cdot \underline{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) + \sum_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1) \cdot \underline{P}(X_i) \\
 &= \underline{P}\left(\lambda_1 \cdot \sum_{i=1}^n X_i\right) + \sum_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1) \cdot \underline{P}(X_i) \\
 &= \underline{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i + \sum_{i=2}^n (\lambda_1 - \lambda_i) \cdot X_i\right) + \sum_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1) \cdot \underline{P}(X_i) \\
 &\geq \underline{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot X_i\right) + \sum_{i=2}^n \underline{P}\left((\lambda_1 - \lambda_i) \cdot X_i\right) + \sum_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1) \cdot \underline{P}(X_i) \\
 &= \underline{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot X_i\right) + \sum_{i=2}^n (\lambda_1 - \lambda_i) \cdot \underline{P}(X_i) + \sum_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1) \cdot \underline{P}(X_i) \\
 &= \underline{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot X_i\right) \\
 &\geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \underline{P}(X_i).
 \end{aligned}$$

■

Wir werden nun etwas allgemeiner Abbildungen von geordneten Mengen in die reellen Zahlen und Abbildungen zwischen geordneten Mengen betrachten. Dazu sollen im Folgenden zunächst einige Fakten über geordnete Mengen und Verbände dargestellt werden:

3.3. Geordnete Mengen und Verbände

Definition 3.3.1. Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf M . Dann heißt R

- **reflexiv** , falls für alle $m \in M$ gilt: $(m, m) \in R$,
- **transitiv** , falls für alle $m, n, o \in M$ gilt: $(m, n) \in R \ \& \ (n, o) \in R \implies (m, o) \in R$,
- **symmetrisch** , falls für alle $m, n \in M$ gilt: $(m, n) \in R \implies (n, m) \in R$,
- **antisymmetrisch** , falls für alle $m, n \in M$ gilt: $(m, n) \in R \ \& \ (n, m) \in R \implies m = n$.

Für $(m, n) \in R$ schreiben wir auch mRn und sagen, dass m kleinergleich n bzw. dass n größergleich m ist. Für verschiedene m, n sagen wir entsprechend kleiner / größer. Zwei Elemente $m, n \in M$ heißen **vergleichbar** ($x \sim y$), falls mRn oder nRm gilt. Andernfalls heißen m und n **unvergleichbar** ($x \approx y$). Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **Äquivalenzrelation**, falls sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist und **Ordnungsrelation**, falls sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Das Paar (M, R) heißt in diesem Fall **geordnete Menge**. Ist R nur reflexiv und transitiv, so heißt (M, R) **quasigeordnete Menge** und R heißt **Quasiordnung**. Die zu einer Relation $R \subseteq M \times M$ gehörige duale Relation R^∂ sei gegeben durch $R^\partial := \{(m, n) \in M \times M \mid (n, m) \in R\}$. Speziell verwenden wir für Ordnungsrelationen das Symbol \leq bzw. \leq_M , um die Grundmenge M zu indizieren. Die duale Ordnung wird dann durch \geq bzw. \geq_M symbolisiert. Für eine Teilmenge $T \subseteq M$ heißt $m \in M$ **obere Schranke** von T , falls für alle $t \in T$ gilt: tRm . Analog heißt m **untere Schranke** von T , falls mRt für alle $t \in T$ gilt. Weiterhin heißt m **Supremum** (bzw. **Infimum**) von T , falls m eine obere (untere) Schranke von T ist und wenn für jede weitere obere (untere) Schranke s von T gilt: mRs (bzw. sRm). Das Supremum wird dann durch $\bigvee T$ und das Infimum durch $\bigwedge T$ symbolisiert. Für geordnete Mengen (M, \leq) ist das Supremum einer Menge eindeutig bestimmt: Für zwei Suprema m, n von T gilt nach Definition: $m \leq n$ und $n \leq m$, woraus mit der Antisymmetrie von \leq die Gleichheit $m = n$ folgt. ein Element $m \in M$ heißt größtes/kleinstes Element von M , falls alle $n \in M \setminus \{m\}$ kleiner/größer als m sind. Das größte Element wird durch \top und das kleinste Element durch \perp symbolisiert. Weiter heißt $m \in M$ **maximal/minimal**, wenn es keine Elemente aus M gibt, die größer/kleiner als m sind. Gibt es genau ein maximales/minimales Element in M , so wird dies mit $\max M$ bzw. $\min M$ bezeichnet. Für eine Teilmenge $T \subseteq M$ sind der Oberbereich $\uparrow T$ und der Unterbereich $\downarrow T$ von T gegeben durch:

$$\uparrow T : = \{m \in M \mid \exists t \in T : t \leq m\}$$

$$\downarrow T : = \{m \in M \mid \exists t \in T : m \leq t\}.$$

Das abgeschlossene (bzw. das offene) Intervall $[a, b]$ (bzw. (a, b)) mit $a, b \in M$ ist definiert durch:

$$[a, b] := \{m \in M \mid a \leq m \leq b\}$$

bzw.

$$(a, b) := \{m \in M \mid a < m < b\}.$$

Die Menge M bzw. das Paar (M, \leq) heißt **lokal endlich**, falls jedes Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in M$ endlich ist.

Definition 3.3.2. Ein Verband $V = (V, \vee, \wedge)$ besteht aus einer nichtleeren Menge V und zwei binären Verknüpfungen $\vee, \wedge : V \times V \rightarrow V$ mit folgenden Eigenschaften:

- **Assoziativität:** $\forall u, v, w \in V : (u \vee v) \vee w = u \vee (v \vee w) \quad \& \quad (u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w).$
- **Kommutativität:** $\forall u, v \in V : u \vee v = v \vee u \quad \& \quad u \wedge v = v \wedge u.$
- **Absorption:** $\forall u, v \in V : u \vee (u \wedge v) = u \quad \& \quad u \wedge (u \vee v) = u.$

Aus diesen Eigenschaften folgt sofort die **Idempotenz** von \vee und \wedge :

$$\begin{aligned} u \vee u &= u \vee (u \wedge (u \vee u)) = u, \\ u \wedge u &= u \wedge (u \vee (u \wedge u)) = u. \end{aligned}$$

Eine geordnete Menge (M, \leq) , in der das Infimum und das Supremum für endliche, nichtleere Mengen immer existiert, bildet mit den Operationen

$$\begin{aligned} \vee : M \times M &\Longrightarrow M : (u, v) \mapsto u \vee v := \bigvee \{u, v\} \\ \wedge : M \times M &\Longrightarrow M : (u, v) \mapsto u \wedge v := \bigwedge \{u, v\} \end{aligned}$$

einen Verband.

Beweis: Die Kommutativität folgt direkt aus der Definition von \wedge und \vee . Nun zur Assoziativität:

Es ist zu zeigen, dass $p := u \vee (v \vee w)$ und $q := (u \vee v) \vee w$ identisch sind. Zunächst ist p als obere Schranke $\geq u$ und $\geq (v \vee w)$. Aus der Schrankeneigenschaft von $(v \vee w)$ folgt weiter $p \geq v$ und $p \geq w$. Mit der Supremumseigenschaft von $(u \vee v)$ bzw. $(u \vee v) \vee w$ folgt schließlich $p \geq (u \vee v)$ bzw. $p \geq (u \vee v) \vee w = q$. Analog folgt $q \geq w$ & $q \geq (u \vee v) \implies q \geq u$ & $q \geq v$ & $q \geq w \implies q \geq u$ & $q \geq (v \vee w) \implies q \geq u \vee (v \vee w) = p$ und insgesamt folgt damit die Gleichheit $p = q$. Die Assoziativität von \wedge folgt in gleicher Weise durch Ersetzen von \geq durch \leq , \vee durch \wedge und Supremum durch Infimum.

Es bleibt noch die Absorption zu zeigen:

Es gilt: $u \geq u$ (Reflexivität) & $u \geq u \wedge v$ (Schrankeneigenschaft von $u \wedge v$) und somit auch $u \geq u \vee (u \wedge v)$ und weiterhin gilt aufgrund der Schrankeneigenschaft von $u \vee (u \wedge v)$ die andere Ungleichung $u \leq u \vee (u \wedge v)$, womit die erste Absorptionsgleichung gezeigt ist. Die andere Gleichung folgt wieder durch Vertauschen von \geq und \leq sowie \vee und \wedge . ■

Auf einem Verband (V, \vee, \wedge) läßt sich eine Ordnungsrelation \leq durch:

$$\leq := \{(u, v) \in V \times V \mid u \wedge v = u\}$$

definieren. Die Reflexivität von \leq folgt aus der Idempotenz von \wedge :

$$u \wedge u = u.$$

Die Transitivität folgt aus der Assoziativität von \wedge :

$$u \wedge v = u \ \& \ v \wedge w = v \implies u \wedge w = (u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w) = u \wedge v = u$$

und die Antisymmetrie folgt aus der Kommutativität von \wedge :

$$u \wedge v = u \ \& \ v \wedge u = v \implies u = u \wedge v = v \wedge u = v.$$

Das Infimum zweier Elemente u, v bezüglich dieser neu definierten Ordnung stimmt mit $u \wedge v$ überein: Zunächst ist $u \wedge v$ eine untere Schranke von $\{u, v\}$, denn es gilt: $(u \wedge v) \wedge u = (v \wedge u) \wedge u = v \wedge (u \wedge u) = v \wedge u = (u \wedge v)$ bzw. $(u \wedge v) \wedge v = u \wedge (v \wedge v) = (u \wedge v)$. Sei nun w eine weitere untere Schranke von $\{u, v\}$, gelte also $w \wedge u = w$ und $w \wedge v = w$. Dann folgt $w \leq (u \wedge v)$, denn es gilt: $w \wedge (u \wedge v) = (w \wedge u) \wedge v = w \wedge v = w$.

Definition 3.3.3. Sei (M, \leq) eine geordnete Menge. Eine Teilmenge $T \subseteq M$ heißt **Kette** (in M), falls je zwei Elemente aus T immer vergleichbar sind. Eine endliche Kette kann immer in der Form $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ mit $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ geschrieben werden. Die **Länge** $l(T)$ ist dann durch n gegeben. Sind je zwei Elemente aus T immer unvergleichbar, so heißt T **Antikette** und die Kardinalität von T heißt die **Weite** von T . Eine Kette / Antikette heißt **maximal**, wenn sie bezüglich der gewöhnlichen Mengeninklusion maximal ist, d.h., dass jede weitere Kette / Antikette S mit $S \supseteq T$ schon mit T übereinstimmt. Zwei Elemente m und n aus M heißen **benachbart**, falls $m < n$ oder $n < m$ gilt. Dabei ist die **Nachbarschaftsrelation** \triangleleft gegeben durch:

$$\triangleleft := \{(m, n) \in M \times M \mid m \leq n \ \& \ \forall q \in M : m \leq q \leq n \implies q = m \text{ oder } q = n\}.$$

In diesem Fall bezeichnen wir m als **unteren Nachbarn** von n bzw. n **oberen Nachbarn** von m . Die **Weite** $width(V)$ eines Verbandes bzw. einer geordneten Menge V ist die maximale Kardinalität einer Antikette in V und die **Höhe** $height(V)$ ist die maximale Länge einer Kette in V .

Definition 3.3.4. Sei (M, \leq) eine endliche geordnete Menge. Eine **Kettenüberdeckung** von M ist eine Menge von Ketten, deren Vereinigung gleich M ist. Sind die Ketten paarweise disjunkt, sagen wir, die Kettenüberdeckung ist disjunkt. Die Anzahl der Ketten in der Kettenüberdeckung heißt deren **Größe**.

Wenn M eine Antikette der Weite n besitzt, dann muss jede Kettenüberdeckung aus mindestens n Ketten bestehen, da nie zwei Elemente der Antikette in einer Kette enthalten sein können. Weiterhin gilt:

Satz 3.3.5. (Dilworth's theorem, [27])

Eine endliche geordnete Menge M besitzt eine disjunkte Kettenüberdeckung der Größe $w = \text{width}(M)$.

Beweis: Der Beweis läuft über vollständige Induktion über die Größe n der geordneten Menge. Für $n = 1$ gilt der Satz offensichtlich. Sei der Satz nun weiterhin richtig für geordnete Mengen mit Größe kleiner als $|M|$. Dann ist zu zeigen, dass M eine disjunkte Kettenüberdeckung der Größe $w = \text{width}(M)$ besitzt. Betrachte dazu eine Antikette maximaler Weite $A = \{a_1, a_2, \dots, a_w\}$. Diese Antikette zerlegt M in zwei Teilmengen $\uparrow A$ und $\downarrow A$:

$$\uparrow A \cup \downarrow A = M.$$

Der Schnitt von $\uparrow A$ und $\downarrow A$ ist dabei genau gleich A . Weiterhin ist A auch eine Antikette maximaler Weite in $\uparrow A$ und $\downarrow A$. Da M endlich ist existieren Elemente $m_* \leq m^*$, so dass m_* minimal und m^* maximal in M ist. Sei nun

$$Q := M \setminus \{m_*, m^*\}.$$

Falls $\text{width}(Q) = k < w$ gilt, dann folgt nach Induktionsvoraussetzung, dass Q eine disjunkte Kettenüberdeckung \mathcal{C} der Größe k besitzt und $\mathcal{C} \cup \{\{m_*, m^*\}\}$ ist eine disjunkte Kettenüberdeckung der Größe w . Ist nun $\text{width}(Q) = w$, dann ist eine Antikette \tilde{A} maximaler Weite in Q auch eine Antikette maximaler Weite in M und es gilt: $\uparrow \tilde{A} \cup \downarrow \tilde{A} = M$. Sei nun \mathcal{C} eine disjunkte Kettenüberdeckung der Größe w von $\uparrow \tilde{A}$ und \mathcal{D} eine disjunkte Kettenzerlegung der Größe w von $\downarrow \tilde{A}$. Dann existiert für jedes $a \in \tilde{A}$ ein $C_a \in \mathcal{C}$ und ein $D_a \in \mathcal{D}$ mit: $C_a \cap D_a = \{a\}$. Da a das kleinste Element von \mathcal{C} und das größte Element von \mathcal{D} ist, ist $C_a \cup D_a$ eine Kette in M und $\{C_a \cup D_a \mid a \in \tilde{A}\}$ ist die gesuchte disjunkte Kettenüberdeckung der Größe w von M . ■

Definition 3.3.6. Eine **Multimenge** über einer Menge Ω ist ein Tupel (Ω, X) , wobei Ω eine Menge und X eine Abbildung von Ω nach \mathbb{N} ist. Eine Multimenge ist also im Wesentlichen nichts anderes als ein spezielles Spiel über Ω , das aber auch unbeschränkt sein kann. Da gewöhnliche Mengen als Abbildungen von Ω nach $\{0, 1\}$ für geeignetes Ω aufgefasst werden können, verallgemeinert das Konzept der Multimenge das Konzept der Menge: für jedes potentielle Element $\omega \in \Omega$ wird durch $X(\omega)$ nicht nur gesagt, ob es in der Menge X vorkommt, sondern auch, wie oft es vorkommt. Im Folgenden wird auch X und nicht nur das Tupel (Ω, X) als Multimenge betrachtet. Für die Menge aller Multimengen soll auch das Symbol \mathbb{N}^Ω verwendet werden. Für Multimengen sind die Verknüpfungen $\vee, \wedge, \cup, \cap, +, -$ und die Relation \leq wie für Spiele definiert. Ein Element ω ist in einer Multimenge enthalten, falls $X(\omega) \geq 1$ gilt. Der **Träger** von X ist gegeben durch $\text{supp}(X) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq 0\}$. Weiterhin sei für endliches Ω die **Rangfunktion** rk definiert als:

$$\text{rk} : \mathbb{N}^\Omega \longrightarrow \mathbb{N} : X \mapsto \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega).$$

Definition 3.3.7. Eine beschränkte bzw. k -beschränkte Multimenge (über Ω) ist eine Multimenge (über Ω), die durch k beschränkt ist:

$$\forall \omega \in \Omega : X(\omega) \leq k.$$

Die Menge aller k - beschränkten Multimengen sei mit \mathbb{N}_k^Ω bezeichnet.

Lemma 3.3.8. Die geordnete Menge $(\mathbb{N}_k^\Omega, \leq)$ mit der Relation \leq aus Definition 3.1.1 ist isomorph zum Teilverband der natürlichen Zahl $N = p_1^k \cdot p_2^k \cdots p_m^k$. Dabei sind p_1, \dots, p_m die ersten m Primzahlen und $m = |\Omega|$.

Beweis: Da die Primfaktorenzerlegung einer natürlichen Zahl eindeutig ist, ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi & : \{n \in \mathbb{N} | n \text{ teilt } N\} \longrightarrow \mathbb{N}_k^\Omega : \\ n & = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m} \cdot p_{m+1}^0 \mapsto X : \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\} \longrightarrow \mathbb{N}_k : \omega_i \mapsto k_i \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

offensichtlich eine Bijektion und die Aussage n_1 teilt n_2 ist äquivalent zur Aussage, dass alle Primzahlpotenzen von n_1 jeweils kleinergleich den Primzahlpotenzen von n_2 sind, also genau, dass $\Phi(n_1) \leq \Phi(n_2)$ gilt. Somit ist Φ auch ein (wohldefinierter) Isomorphismus. ■

Lemma 3.3.9. Sei $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ endlich. Die Anzahl $\beta(k, m)$ maximaler Ketten in \mathbb{N}_k^Ω ist gegeben durch:

$$\beta(k, m) = \prod_{i=1}^m \binom{k \cdot i}{k}.$$

Beweis: Eine maximale Kette kann dargestellt werden als $K = \{K_0, K_1, \dots, K_n\}$ mit $\perp = K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft K_2 \triangleleft \dots \triangleleft K_n = \top$ und $n = k \cdot m$, denn der Rang des größten Elements $\top = \mathbb{1}_\Omega \cdot k$ ist genau gleich $k \cdot m$ und zwei benachbarte Multimengen unterscheiden sich im Rang um genau 1. Da $K_i \triangleleft K_{i+1}$ äquivalent zu $K_i \leq K_{i+1}$ & $\text{rk}(K_{i+1} - K_i) = 1$ ist, kann die Kette K auch durch einen Vektor $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{N}_m^n$ dargestellt werden:

$$\begin{aligned} K_0 & = \perp = 0_\Omega \\ K_i & = K_{i-1} + \mathbb{1}_{\{\omega_{c_i}\}} \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Da $K_n = \mathbb{1}_\Omega \cdot k$ gelten muss, muss notwendig

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\omega_{c_i}\}} = \mathbb{1}_\Omega \cdot k$$

gelten. Also muss in der Menge $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ genau k -mal eine 1, genau k -mal eine 2, ... und genau k -mal ein m vorkommen. Ansonsten ist der Vektor $c \in \mathbb{N}_m^n$ frei wählbar und verschiedene Vektoren repräsentieren verschiedene Ketten und umgekehrt. Es gibt nun $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, die

Indizes zu wählen, für die c_i gleich 1 ist. Weiterhin gibt es, falls die Indizes, für die c_i gleich 1 ist, festgelegt sind, weitere $\binom{n-k}{k}$ Möglichkeiten, die Indizes zu wählen, für die $c_i = 2$ gilt und so fort. Insgesamt gibt es also

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{k} \binom{n-2k}{k} \cdots \binom{k}{k} = \prod_{i=1}^m \binom{k \cdot i}{k}$$

Möglichkeiten, eine maximale Kette zu bilden. ■

Korollar 3.3.1. Die Anzahl maximaler Ketten in 2^Ω ist gleich $|\Omega|!$.

Lemma 3.3.10. Seien $k, m, l \in \mathbb{N}^+$ mit $m \cdot k \geq l$. Die Anzahl $\alpha(k, m, l)$ aller k -beschränkten Multimengen über $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ mit Rang l ist rekursiv gegeben durch:

$$\alpha(k, 1, l) = \begin{cases} 1 & \text{falls } l \leq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\alpha(k, m, l) = \sum_{i=l-k}^l \alpha(k, m-1, i).$$

Beweis: Offensichtlich gibt es für $l > k$ keine k -beschränkte Multimenge über einem einelementigen Grundraum $\{\omega_1\}$ mit Rang l und für $l \leq k$ gibt es genau eine k -beschränkte Multimenge M mit Rang l , nämlich:

$$M : \{\omega_1\} \longrightarrow \mathbb{N}_k : \omega_1 \mapsto l.$$

Weiterhin kann eine k -beschränkte Multimenge M über $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ mit Rang l immer zusammengesetzt werden aus einer k -beschränkten Multimenge $N := M|_{\{\omega_1, \dots, \omega_{m-1}\}}$ über $\{\omega_1, \dots, \omega_{m-1}\}$ und einer k -beschränkten Multimenge $O := M|_{\{\omega_m\}}$ über $\{\omega_m\}$:

$$M(\omega_i) = \begin{cases} N(\omega_i) & \text{falls } i \neq m \\ O(\omega_i) & \text{falls } i = m. \end{cases}$$

Damit M Rang l hat muss O Rang $l - rk(N)$ besitzen. Da der Rang von O kleinergleich k sein muss, muss der Rang von N zwischen $l-k$ und l liegen. Da O durch seinen Rang bereits eindeutig definiert ist gibt es genau $\sum_{i=l-k}^l \alpha(k, m-1, i)$ Multimengen aus \mathbb{N}_k^Ω mit Rang l . ■

Lemma 3.3.11. Die Weite des Verbandes \mathbb{N}_k^Ω ist gegeben durch die Anzahl

$$\alpha(k, |\Omega|, \lfloor \frac{k \cdot |\Omega|}{2} \rfloor)$$

aller k -beschränkten Multimengen mit Rang $\lfloor \frac{k \cdot |\Omega|}{2} \rfloor$.

Beweis: Zunächst ist die Menge A aller k -beschränkten Multimengen mit Rang $\lfloor \frac{k \cdot |\Omega|}{2} \rfloor$ eine Antikette, denn wenn $a, b \in A$ mit $a \leq b$ existieren, dann folgt bereits $a = b$, denn für alle $\omega \in \Omega$ muss gelten: $a(\omega) \leq b(\omega)$ und wenn für ein $\omega \in \Omega$ die strikte Ungleichung $a(\omega) < b(\omega)$ gilt, dann muss notwendigerweise der Rang von a kleiner als der Rang von b sein, was im Widerspruch zur Voraussetzung $\text{rk}(a) = \text{rk}(b) = \lfloor \frac{k \cdot |\Omega|}{2} \rfloor$ ist. Da aber nach Theorem 1 aus [7] jede Antikette in ihrer Mächtigkeit kleinergleich $\alpha(k, |\Omega|, \lfloor \frac{k \cdot |\Omega|}{2} \rfloor)$ ist, ist die Behauptung gezeigt (Theorem 1 aus [7] macht Aussagen über Antiketten im Teilerverband einer natürlichen Zahl N , der isomorph zu \mathbb{N}_k^Ω ist, falls $N = p_1^k \cdot p_2^k \cdot \dots \cdot p_m^k$ mit $m = |\Omega|$ und p_1, \dots, p_m die ersten m Primzahlen gewählt wird). ■

Korollar 3.3.2. Die Weite des Verbandes 2^Ω beträgt

$$\binom{|\Omega|}{\lfloor \frac{|\Omega|}{2} \rfloor}.$$

3.4. Abbildungen zwischen geordneten Mengen

3.4.1. Hüllen- und Kernoperatoren

Definition 3.4.1. Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und seien (P, \leq_P) und (Q, \leq_Q) geordnete Mengen, die Verbände bilden. Die zugeordneten Infima bzw. Suprema seien mit \wedge_Q, \wedge_P bzw. \vee_P, \vee_Q bezeichnet. Eine Abbildung $H : P \rightarrow Q$ heißt:

- **monoton**, falls für alle $p, q \in P$ gilt: $p \leq_P q \implies H(p) \leq_Q H(q)$;
- **antiton**, falls für alle $p, q \in P$ gilt: $p \leq_P q \implies H(q) \leq_Q H(p)$;
- **idempotent**, falls $(P, \leq_P) = (Q, \leq_Q)$ und für alle $p \in P$ gilt: $H(H(p)) = H(p)$;
- **extensiv**, falls $(P, \leq_P) = (Q, \leq_Q)$ und für alle $p \in P$ gilt: $p \leq_P H(p)$;
- **intensiv**, falls $(P, \leq_P) = (Q, \leq_Q)$ und für alle $p \in P$ gilt: $H(p) \leq_P p$;
- **infimumtreu**, falls für alle $p, q \in P$ gilt: $H(p \wedge_P q) = H(p) \wedge_Q H(q)$;
- **supremumtreu**, falls für alle $p, q \in P$ gilt: $H(p \vee_P q) = H(p) \vee_Q H(q)$;
- **infimumabgeschlossen**, falls für alle $p, q \in P$ ein $r \in P$ existiert mit:
 $H(p) \wedge_Q H(q) = H(r)$;
- **supremumabgeschlossen**, falls für alle $p, q \in P$ ein $r \in P$ existiert mit:
 $H(p) \vee_Q H(q) = H(r)$;
- **Hüllenoperator**, falls H monoton, extensiv und idempotent ist;
- **Kernoperator**, falls H monoton, intensiv und idempotent ist.

Ist auf (Q, \leq) eine (invertierbare) Addition $+$ erklärt, so heißt H :

- **submodular**, falls für alle $p, q \in P$ gilt: $H(p \wedge_P q) + H(p \vee_P q) \leq_Q H(p) + H(q)$;
- **supermodular**, falls für alle $p, q \in P$ gilt: $H(p \wedge_P q) + H(p \vee_P q) \geq_Q H(p) + H(q)$;
- **modular**, falls für alle $p, q \in P$ gilt: $H(p \wedge_P q) + H(p \vee_P q) = H(p) + H(q)$;
- **k -monoton**, falls für alle $p_1, \dots, p_k \in P$ gilt: $H(\bigvee_{i=1}^k p_i) \geq \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} H(\bigwedge_{i \in T} p_i)$;
- **vollständig monoton**, falls H k -monoton ist für alle $k \geq 2$;
- **k -alternierend**, falls für alle $p_1, \dots, p_k \in P$ gilt: $H(\bigwedge_{i=1}^k p_i) \leq \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} H(\bigvee_{i \in T} p_i)$;
- **vollständig alternierend**, falls H k -alternierend ist für alle $k \geq 2$.

Falls Weiterhin (P, \leq_P) ein kleinstes Element \perp_P besitzt, so heißt H :

- **subadditiv**, falls für alle $p, q \in P$ mit $p \wedge_P q = \perp_P$ gilt: $H(p \vee_P q) \leq_Q H(p) + H(q)$;
- **superadditiv**, falls für alle $p, q \in P$ mit $p \wedge_P q = \perp_P$ gilt: $H(p \vee_P q) \geq_Q H(p) + H(q)$;
- **additiv**, falls für alle $p, q \in P$ mit $p \wedge_P q = \perp_P$ gilt: $H(p \vee_P q) = H(p) + H(q)$.

Lemma 3.4.2. Für monotone Abbildungen $H : P \rightarrow Q$ und $p, q \in P$ gilt:

- (a) $H(p \wedge_P q) \leq_Q H(p) \wedge_Q H(q)$
 (b) $H(p \vee_P q) \geq_Q H(p) \vee_Q H(q)$.

Beweis: Seien $p, q \in P$ beliebig.

- (a) Aus $p \wedge_P q \leq_P p$ und $p \wedge_P q \leq_P q$ folgt $H(p \wedge_P q) \leq_Q H(p)$ bzw. $H(p \wedge_P q) \leq_Q H(q)$ und somit $H(p \wedge_P q) \leq_Q H(p) \wedge_Q H(q)$.
 (b) Aus $p \vee_P q \geq_P p$ und $p \vee_P q \geq_P q$ folgt $H(p \vee_P q) \geq_Q H(p)$ bzw. $H(p \vee_P q) \geq_Q H(q)$ und damit $H(p \vee_P q) \geq_Q H(p) \vee_Q H(q)$.

■

Lemma 3.4.3. Hüllenoperatoren sind infimumabgeschlossen und Kernoperatoren sind supremumabgeschlossen. Weiterhin sind supremumabgeschlossene Hüllenoperatoren bereits supremumtreu und infimumabgeschlossene Kernoperatoren sind bereits infimumtreu.

Beweis:

- Sei H ein Hüllenoperator und $p, q \in P$ beliebig. Mit $r := H(p) \wedge_P H(q)$ folgt $H(p) \wedge_P H(q) = H(H(p) \wedge_P H(q))$: Aus der Extensionalität von H folgt $H(p) \wedge_P H(q) \leq_P H(H(p) \wedge_P H(q))$ und aus $H(p) \wedge_P H(q) \leq_P H(p)$ bzw. $H(p) \wedge_P H(q) \leq_P H(q)$ und der Monotonie sowie der Idempotenz von H folgt $H(H(p) \wedge_P H(q)) \leq_P H(H(p)) = H(p)$ bzw. $H(H(p) \wedge_P H(q)) \leq_P H(q)$ und somit $H(H(p) \wedge_P H(q)) \leq_P H(p) \wedge_P H(q)$.
- Für einen Kernoperator K und $p, q \in P$ folgt analog mit $r := K(p) \vee_P K(q)$ und der Intensionalität von K die Ungleichung $K(K(p) \vee_P K(q)) \leq_P K(p) \vee_P K(q)$. Mit $K(p) \leq_P K(p) \vee_P K(q)$ bzw. $K(q) \leq_P K(p) \vee_P K(q)$ folgt $K(p) = K(K(p)) \leq_P K(K(p) \vee_P K(q))$ bzw. $K(q) \leq_P K(K(p) \vee_P K(q))$ und somit $K(p) \vee_P K(q) \leq_P K(K(p) \vee_P K(q))$.
- Für einen supremumabgeschlossenen Hüllenoperator H und $p, q \in P$ folgt die Ungleichung $H(p \vee_P q) \geq_P H(p) \vee_P H(q)$ aus Lemma 3.4.2. Für die Ungleichung „ \leq_P “ betrachte die Relationen

$$p \leq_P H(p) \leq_P H(p) \vee_P H(q)$$

und

$$q \leq_P H(q) \leq_P H(p) \vee_P H(q),$$

woraus $p \vee_P q \leq_P H(p) \vee_P H(q)$ und mit der Monotonie und der Idempotenz von H

$$H(p \vee_P q) \leq_P H[H(p) \vee_P H(q)] = H(p) \vee_P H(q)$$

folgt, denn das Supremum $H(p) \vee_P H(q)$ ist darstellbar als $H(r) = H(H(r))$ für ein geeignetes $r \in P$.

- Die Aussage über infimumabgeschlossene Kernoperatoren folgt wieder analog durch Vertauschen von \leq_P und \geq_P bzw. \vee_P und \wedge_P .

■

Bemerkung 3.4.4. Supermodularität ist äquivalent zur 2-Monotonie und Submodularität ist äquivalent zur 2-Alterniertheit einer Abbildung. Weiterhin ist für $k > 2$ eine k -monotone Abbildung H auch $(k-1)$ -monoton: Seien p_1, p_2, \dots, p_{k-1} aus P . Definiere $p_k := p_{k-1}$. Dann gilt wegen der Idempotenz (und der Assoziativität) von \vee und \wedge :

$$\begin{aligned} H\left(\bigvee_{i=1}^{k-1} p_i\right) &= H\left(\bigvee_{i=1}^k p_i\right) \\ &\geq \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} H\left(\bigwedge_{i \in T} p_i\right) \\ &= \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\} \\ k, k-1 \in T}} (-1)^{|T|+1} H\left(\bigwedge_{i \in T} p_i\right) + \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\} \\ k \in T \& k-1 \notin T}} (-1)^{|T|+1} H\left(\bigwedge_{i \in T} p_i\right) + \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\} \\ k \notin T}} (-1)^{|T|+1} H\left(\bigwedge_{i \in T} p_i\right) \\ &= \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\} \\ k, k-1 \in T}} (-1)^{|T|+1} [H\left(\bigwedge_{i \in T} p_i\right) - H\left(\bigwedge_{i \in T \setminus \{k-1\}} p_i\right)] + \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\} \\ k \notin T}} (-1)^{|T|+1} H\left(\bigwedge_{i \in T} p_i\right) \\ &= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k-1\}} (-1)^{|T|+1} H\left(\bigwedge_{i \in T} p_i\right). \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion folgt dann insbesondere, dass jede k -monotone Abbildung supermodular ist. Analog sind k -alternierende Abbildungen submodular. Aus k -Monotonie bzw. k -Alterniertheit folgt jedoch nicht die Monotonie einer Abbildung.

Lemma 3.4.5. Seien (P, \leq_P) , (Q, \leq_Q) sowie (R, \leq_R) geordnete Mengen, die Verbände bilden. Seien weiter $H : (P, \leq_P) \rightarrow (Q, \leq_Q)$ infimumtreu und $I : (Q, \leq_Q) \rightarrow (R, \leq_R)$ monoton und k -monoton. Dann ist die Komposition $I \circ H$ monoton und k -monoton.

Beweis: Zunächst ist H monoton, denn für $p \leq_P p'$ folgt sofort $H(p) = H(p \wedge p') = H(p) \wedge H(p') \leq_Q H(p')$. Deshalb ist auch die Komposition $I \circ H$ monoton: aus $p \leq_P p'$ folgt $H(p) \leq_Q$

$H(p')$ und somit $I(H(p)) \leq_R I(H(p'))$. Nun zur k -Monotonie. Seien $p_1, \dots, p_k \in P$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
(I \circ H)\left(\bigvee_{i=1}^k p_i\right) &= I\left(H\left(\bigvee_{i=1}^k p_i\right)\right) \\
&\geq_R \bigvee_{i=1}^k I(H(p_i)) \\
&\geq_R \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} I\left(\bigwedge_{i \in T} H(p_i)\right) \\
&= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \bigwedge_{i \in T} I(H(p_i)) \\
&= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \bigwedge_{i \in T} (I \circ H)(p_i).
\end{aligned}$$

■

Wir werden nun die Definition der natürlichen Extension auf Abbildungen der Form

$$H : \mathcal{L}(\Omega) \supseteq \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}(\Omega'),$$

die wir auch als **verallgemeinerte Prävisionen** bezeichnen, erweitern:

Definition 3.4.6. Sei $H : \mathcal{L}(\Omega) \supseteq \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}(\Omega')$ eine verallgemeinerte Prävision. Dann vermeidet H sicheren Verlust, wenn für alle $\omega' \in \Omega'$ die gewöhnliche Prävision

$$\underline{P}_{\omega'} : \mathcal{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : X \mapsto (H(X))(\omega')$$

sicheren Verlust vermeidet. Die Menge aller verallgemeinerten Prävisionen $H : \mathcal{L}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}(\Omega')$, die sicheren Verlust vermeiden, sei mit $\text{ASL}(\Omega, \Omega')$ bezeichnet. Vermeide H sicheren Verlust. Dann ist die **natürliche Extension** von H definiert als

$$H^\diamond : \mathcal{L}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}(\Omega') : X \mapsto \bigvee X_\downarrow^H$$

mit

$$X_\downarrow^H := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 \mid n \in \mathbb{N}^+, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{K}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X \right\}.$$

Beachte, dass die Grundräume Ω und Ω' nicht identisch sein müssen. Da H sicheren Verlust vermeidet ist wegen der punktweisen Definition des Supremums die natürliche Extension H^\diamond wohldefiniert. Stimmt die natürliche Extension H^\diamond auf \mathcal{K} mit H überein, so heißt H **kohärent**. Wegen Lemma 3.2.11 und wegen der punktweisen Definition des Supremums ist also H genau dann kohärent, wenn für alle $\omega' \in \Omega'$ die gewöhnliche Prävision $\underline{P}_{\omega'}$ kohärent ist.

Bemerkung 3.4.7. Wenn wir \mathbb{R} mit $\mathcal{L}(\Omega') = \mathcal{L}(\{\omega_1\})$ durch die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(\{\omega_1\}) : x \mapsto X_x : \omega_1 \mapsto x$$

identifizieren, können wir eine gewöhnliche untere Prävision \underline{P} als verallgemeinerte Prävision $\underline{P} : \mathcal{L}(\omega) \rightarrow \mathcal{L}(\Omega')$ auffassen und die verschiedenen Definitionen des Vermeidens sicheren Verlusts, der natürlichen Extension sowie der Kohärenz stimmen jeweils miteinander überein.

Satz 3.4.8. *Die natürliche Extension $H^\diamond : \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(\Omega')$ einer Abbildung $H : \mathcal{L}(\Omega) \supseteq \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}(\Omega')$ dominiert H auf \mathcal{K} und ist selbst ein Kernoperator, falls H ein Kernoperator ist.*

Beweis: Sei $X \in \mathcal{K}$ dann ist $1 \cdot x + 0 \leq X$ und folglich $1 \cdot H(X) + 0 = H(X) \in X_\downarrow^H$. Somit gilt: $H(X) \leq \bigvee X_\downarrow^H = H^\diamond(X)$, d.h. H^\diamond dominiert H auf \mathcal{K} .

- **Monotonie:** Seien $X, Y \in \mathcal{K}$ mit $X \leq Y$. Dann folgt nach Definition $X_\downarrow^H \subseteq Y_\downarrow^H$ und somit $H^\diamond(X) = \bigvee X_\downarrow^H \leq \bigvee Y_\downarrow^H = H^\diamond(Y)$.
- **Intensionalität:** Sei $Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 \in X_\downarrow^H$ mit $n \in \mathbb{N}^+, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{K}$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X$ beliebig. Da die $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nichtnegativ sind und da H auf \mathcal{K} intensiv ist folgt: $Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 \leq X$. Da $Y \in X_\downarrow^H$ beliebig war ergibt sich schließlich $H^\diamond(X) = \bigvee X_\downarrow^H \leq X$.
- **Idempotenz:** $H^\diamond(H^\diamond(X)) \leq H^\diamond(X)$ folgt bereits aus der Intensionalität von H^\diamond . Es ist noch zu zeigen, dass $X_\downarrow^H \subseteq (H^\diamond(X))_\downarrow^H$ gilt, denn dann folgt sofort

$$H^\diamond(X) = \bigvee X_\downarrow^H \leq \bigvee (H^\diamond(X))_\downarrow^H = H^\diamond(H^\diamond(X))$$

und damit die Idempotenz von H^\diamond . Sei nun also $Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 \in X_\downarrow^H$ mit $n \in \mathbb{N}^+, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{K}$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X$ beliebig. Da Y aus X_\downarrow^H ist gilt

$$Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 \leq H^\diamond(X)$$

und mit der Idempotenz von H folgt

$$Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i H(H(\chi_i)) + \lambda_0 \in (H^\diamond(X))_\downarrow^H.$$

■

Satz 3.4.9. *Die Abbildung*

$$\diamond : \text{ASL}(\Omega, \Omega') \rightarrow \text{ASL}(\Omega, \Omega') : H \mapsto H^\diamond$$

, die jeder verallgemeinerten Prävision, die sicheren Verlust vermeidet, ihre natürliche Extension zuordnet, ist selbst ein Hüllenoperator.

Beweis: Zunächst ist \diamond wohldefiniert, denn für jedes $\omega' \in \Omega'$ ist die zugehörige gewöhnliche Prävision $H_{\omega'}^{\diamond}$, als natürliche Extension einer gewöhnlichen Prävision kohärent und vermeidet deshalb sicheren Verlust. Darum vermeidet auch H^{\diamond} sicheren Verlust. Die Extensivität von \diamond ist genau die in Satz 3.4.8 gezeigte Dominanz von H^{\diamond} . Die Monotonie folgt aus der Tatsache, dass für $H_1 \leq H_2$ die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i H_1(\chi_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i H_2(\chi_i)$$

für $n \in \mathbb{N}^+$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\chi_1, \dots, \chi_n \in \text{dom}(H_1)$ gilt. Nun zur Idempotenz: Sei $X \in \text{dom}(H)$ beliebig. Wegen der Extensionalität von \diamond gilt bereits $H^{\diamond}(X) \leq ((H^{\diamond})^{\diamond})(X)$. Für die andere Ungleichung betrachte ein beliebiges aber festes $\omega \in \Omega$. Wir werden zeigen, dass für jedes $Y \in X_{\downarrow}^{H^{\diamond}}$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $Z \in X_{\downarrow}^H$ existiert mit

$$(Y - Z)(\omega) \leq \varepsilon,$$

woraus

$$(((H^{\diamond})^{\diamond})(X))(\omega) = (\bigvee X_{\downarrow}^{H^{\diamond}})(\omega) \leq (\bigvee X_{\downarrow}^H)(\omega) = (H^{\diamond}(X))(\omega)$$

und somit

$$((H^{\diamond})^{\diamond})(X) = \bigvee X_{\downarrow}^{H^{\diamond}} \leq \bigvee X_{\downarrow}^H = H^{\diamond}(X)$$

folgt:

Sei $Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i H^{\diamond}(\chi_i) + \lambda_0 \in X_{\downarrow}^{H^{\diamond}}$ mit $n \in \mathbb{N}^+$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{X}$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ existieren (da H^{\diamond} als punktweises Supremum definiert ist) $n_i \in \mathbb{N}^+$, $\mu_i^0 \in \mathbb{R}$, $\mu_i^1, \dots, \mu_i^{n_i} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\nu_i^1, \dots, \nu_i^{n_i} \in \text{dom}(H)$, $\varepsilon_i \in (0, \frac{\varepsilon}{n})$ mit:

$$Y(\omega) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \left[\sum_{j=1}^{n_i} \mu_i^j H(\nu_i^j) + \mu_i^0 + \varepsilon_i \right] + \lambda_0 \right)(\omega)$$

und

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad : \quad \sum_{j=1}^{n_i} \mu_i^j \nu_i^j + \mu_i^0 \leq \chi_i.$$

Definiere nun Z durch:

$$Z := \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[\sum_{j=1}^{n_i} \mu_i^j H(\nu_i^j) + \mu_i^0 \right] + \lambda_0.$$

Dann ist Z aus X_{\downarrow}^H , denn es gilt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \left[\sum_{j=1}^{n_j} \mu_i^j \nu_i^j + \mu_i^0 \right] + \lambda_0 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X$$

und weiterhin gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} (Y - Z)(\omega) &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \left[\sum_{j=1}^{n_i} \mu_i^j H(\nu_i^j) + \mu_i^0 + \varepsilon_i \right] + \lambda_0 \right)(\omega) - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \left[\sum_{j=1}^{n_i} \mu_i^j H(\nu_i^j) + \mu_i^0 \right] + \lambda_0 \right)(\omega) \\ &\leq n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Definition 3.4.10. Eine Abbildung $H : \mathcal{L}(\Omega) \supseteq \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}' \subseteq \mathcal{L}(\Omega')$ heißt **extensiv infimum-abgeschlossen bezüglich** $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$, falls für beliebige

$m, n \in \mathbb{N}^+$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$, $\chi_1, \dots, \chi_n, \nu_1, \dots, \nu_m \in \mathcal{M}$ das Spiel

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^m \mu_i H(\nu_i) + \mu_0 \right)$$

darstellbar ist als

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i H(\tau_i) + \tau_0$$

mit geeigneten $k \in \mathbb{N}^+$, $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, $\tau_1, \dots, \tau_k \in \mathcal{M}$.

Analog heißt H **extensiv supremumabgeschlossen bezüglich** \mathcal{M} falls das Spiel

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 \right) \vee \left(\sum_{i=1}^m \mu_i H(\nu_i) + \nu_0 \right)$$

darstellbar ist als

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i H(\tau_i) + \tau_0.$$

Lemma 3.4.11. Eine infimum- und supremumabgeschlossene Abbildung

$$H : \mathcal{L}(\Omega') \supseteq \mathcal{K} \rightarrow 2^\Omega$$

ist extensiv infimumabgeschlossen und extensiv supremumabgeschlossen bezüglich \mathcal{K} .

Beweis: Sei $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0$ und $Y = \sum_{i=1}^m \mu_i H(\nu_i) + \mu_0$ mit

$m, n \in \mathbb{N}^+$, $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben. Sei weiter $Z := X \wedge Y$ durch ihre Standarddarstellung

$$Z = \sum_{i=0}^k \gamma_i S_{x_i}(Z)$$

gegeben. Wir zeigen, dass jeder beliebige α -Schnitt $S_\alpha(Z)$ als Vereinigung von Schnitten von geeigneten $H(\chi_i)$ bzw. $H(\nu_j)$ darstellbar ist, so dass nach Voraussetzung $Z = \sum_{i=0}^k \gamma_i H(\tau_i)$ für

geeignete $\tau_i \in \mathcal{K}$ gilt. Sei dazu $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ und $\mu := (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$. Dann gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} S_\alpha(Z) &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq \alpha \ \& \ Y(\omega) \geq \alpha\} \\ &= \bigcup \{ [\bigcap_{i:p_i=1} H(\chi_i)] \cap [\bigcap_{j:q_j=1} H(\nu_j)] \mid (p, q) \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^m, \langle p, \lambda \rangle + \lambda_0 \geq \alpha, \langle q, \mu \rangle + \mu_0 \geq \alpha \}. \end{aligned}$$

Die extensive Supremumabgeschlossenheit folgt analog mit der Standarddarstellung von $Z = X \vee Y$ und der Darstellung

$$\begin{aligned} S_\alpha(Z) &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq \alpha \ \text{oder} \ Y(\omega) \geq \alpha\} \\ &= \bigcup \{ [\bigcap_{i:p_i=1} H(\chi_i)] \cup [\bigcap_{j:q_j=1} H(\nu_j)] \mid (p, q) \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^m, \langle p, \lambda \rangle + \lambda_0 \geq \alpha, \langle q, \mu \rangle + \mu_0 \geq \alpha \}. \end{aligned}$$

■

Satz 3.4.12. Die natürliche Extension eines Kernoperators $H : \mathcal{L}(\Omega) \supseteq \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ ist infimum-treu, falls H extensiv infimumabgeschlossen bezüglich \mathcal{K} ist.

Beweis: Seien $X, Y \in \mathcal{L}(\Omega)$. Es ist zu zeigen: $H^\diamond(X \wedge Y) = H^\diamond(X) \wedge H^\diamond(Y)$. Die Ungleichung \leq folgt aus Lemma 3.4.2 (a). Für die andere Ungleichung betrachten wir das Spiel

$$H^\diamond(X) \wedge H^\diamond(Y) = \bigvee X_\downarrow^H \wedge \bigvee Y_\downarrow^H.$$

Für beliebige Indexmengen I, J und reelle Zahlen $(a_i)_{i \in I}, (b_j)_{j \in J}$ gilt:

$$\bigvee_{i \in I} a_i \wedge \bigvee_{j \in J} b_j = \bigvee_{i \in I, j \in J} (a_i \wedge b_j).$$

Da das Infimum von Spielen punktweise definiert ist überträgt sich diese Eigenschaft auf Spiele und es folgt

$$\begin{aligned} \bigvee X_\downarrow^H \wedge \bigvee Y_\downarrow^H &= \bigvee \{ \sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 \wedge \sum_{i=1}^m \mu_i H(\nu_i) + \mu_0 \mid n, m \in \mathbb{N}^+, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ &\quad \lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}, \chi_1, \dots, \chi_n, \nu_1, \dots, \nu_m \in \mathcal{K}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X, \sum_{i=1}^m \mu_i \nu_i + \mu_0 \leq Y \} \\ &=: \bigvee S. \end{aligned}$$

Sei nun $V \in S$ beliebig. Dann existieren $n, m \in \mathbb{N}^+, \lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n, \nu_1, \dots, \nu_m \in \mathcal{K}$ mit:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X \tag{*}$$

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \nu_i + \mu_0 \leq Y \tag{**}$$

und

$$V = \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 \right] \wedge \left[\sum_{i=1}^m \mu_i H(\nu_i) + \mu_0 \right].$$

Nach Voraussetzung ist V darstellbar als

$$V = \sum_{i=1}^k \gamma_i H(\tau_i) + \tau_0$$

mit $k \in \mathbb{N}^+$, $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\tau_1, \dots, \tau_k \in \mathcal{X}$. Aus der Idempotenz von H folgt:

$$\begin{aligned} V &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 \right] \wedge \left[\sum_{i=1}^m \mu_i H(\nu_i) + \mu_0 \right] \\ &= \sum_{i=1}^k \gamma_i H(\tau_i) + \tau_0 = \sum_{i=1}^k \gamma_i H(H(\tau_i)) + \tau_0 \leq \bigvee (X \wedge Y)_{\downarrow}^H, \end{aligned}$$

denn wegen der Intensionalität von H sowie (*) und (**) gilt:

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i H(\tau_i) + \tau_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 \wedge \sum_{i=1}^m \mu_i H(\nu_i) + \mu_0 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \wedge \sum_{i=1}^m \mu_i \nu_i + \mu_0 \leq X \wedge Y.$$

Da $V \in S$ beliebig war folgt die Ungleichung

$$H^{\diamond}(X) \wedge H^{\diamond}(Y) = \bigvee S \leq \bigvee (X \wedge Y)_{\downarrow}^H = H^{\diamond}(X \wedge Y). \quad \blacksquare$$

Lemma 3.4.13. *Seien $H : \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(\Omega')$ und $I : \mathcal{L}(\Omega') \rightarrow \mathcal{L}(\Omega'')$ verallgemeinerte Prävisionen. Die Hintereinanderausführung $I \circ H$ vermeidet sicheren Verlust, falls H und I sicheren Verlust vermeiden. Sind H und I kohärent, so ist es auch $I \circ H$.*

Beweis: Wenn H sicheren Verlust vermeidet gilt für alle $\omega' \in \Omega'$ und beliebige Spiele $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{L}(\Omega)$:

$$\sup_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) \geq \left(\sum_{i=1}^n H(X_i) \right)(\omega'),$$

woraus

$$\sup_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) \geq \sup_{\omega' \in \Omega'} \left(\sum_{i=1}^n H(X_i) \right)(\omega')$$

folgt. Wenn auch I sicheren Verlust vermeidet folgt daraus für beliebiges $\omega'' \in \Omega''$:

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) &\geq \sup_{\omega' \in \Omega'} \left(\sum_{i=1}^n H(X_i) \right)(\omega') \\ &\geq \sum_{i=1}^n (I(H(X_i)))(\omega'') = \sum_{i=1}^n ((I \circ H)(X_i))(\omega''), \end{aligned}$$

so dass $I \circ H$ sicheren Verlust vermeidet. Für die Kohärenzaussage zeigen wir, dass für alle $\omega'' \in \Omega''$ die gewöhnliche Prävision $(I \circ H)_{\omega''}$ kohärent ist. Dazu zeigen wir die Axiome **(P1)** bis **(P3)**:

(P1): Sei $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ beliebig. Da für beliebiges $\omega' \in \Omega'$ die Prävision $H_{\omega'}$ kohärent ist gilt $(H(X))(\omega') \geq \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega)$ und folglich:

$$\inf_{\omega' \in \Omega'} (H(X))(\omega') \geq \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega).$$

Da auch I kohärent ist gilt für alle $\omega'' \in \Omega''$:

$$(I(H(X)))(\omega'') \geq \inf_{\omega' \in \Omega'} (H(X))(\omega')$$

und somit:

$$((I \circ H)(X))(\omega'') = (I(H(X)))(\omega'') \geq \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega).$$

(P2): Für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $X \in \mathcal{L}(\Omega)$, $\omega'' \in \Omega''$ gilt wegen der Kohärenz von allen $H_{\omega'}$ und wegen der Kohärenz von $I_{\omega''}$:

$$\begin{aligned} ((I \circ H)(\lambda X))(\omega'') &= (I(H(\lambda X)))(\omega'') \\ &= (I(\lambda H(X)))(\omega'') \\ &= (\lambda I(H(X)))(\omega''). \end{aligned}$$

(P3): Seien $X, Y \in \mathcal{L}(\Omega)$ und $\omega'' \in \Omega''$ beliebig. Da $H_{\omega'}$ für beliebige $\omega' \in \Omega'$ kohärent ist gilt:

$$(H(X + Y))(\omega') \geq [H(X) + H(Y)](\omega')$$

und somit:

$$H(X + Y) \geq H(X) + H(Y).$$

Da $I_{\omega''}$ als kohärente Prävision monoton ist folgt schließlich:

$$\begin{aligned} ((I \circ H)(X + Y))(\omega'') &= (I(H(X + Y)))(\omega'') \\ &\geq (I(H(X) + H(Y)))(\omega'') \\ &\geq (I(H(X)) + I(H(Y)))(\omega'') \\ &= ((I \circ H)(X) + (I \circ H)(Y))(\omega''). \end{aligned}$$

■

Lemma 3.4.14. Seien $H : \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(\Omega')$ und $I : \mathcal{L}(\Omega') \rightarrow \mathcal{L}(\Omega'')$ verallgemeinerte Prävisionen, die sicheren Verlust vermeiden. Dann gilt:

$$(I \circ H)^\diamond \leq (I^\diamond \circ H)^\diamond \leq I^\diamond \circ H^\diamond.$$

Ist der Grundraum Ω' endlich und H ein extensiv supremumabgeschlossener Kernoperator sowie I^\diamond linear (d.h. alle $I_{\omega''}^\diamond$ sind linear), so gilt sogar:

$$(I^\diamond \circ H)^\diamond = I^\diamond \circ H^\diamond.$$

Beweis: Aus $I \leq I^\diamond$ folgt $I \circ H \leq I^\diamond \circ H$ und somit $(I \circ H)^\diamond \leq (I^\diamond \circ H)^\diamond$. Nun zur zweiten Ungleichung:

Sei $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ beliebig. Da Lemma 3.4.2 (b) analog auch für beliebige nichtleere Suprema gilt folgt:

$$\begin{aligned}
(I^\diamond \circ H^\diamond)(X) &= I^\diamond(\bigvee\{\sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 \mid n \in \mathbb{N}^+, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{L}(\Omega), \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X\}) \\
&\geq \bigvee\{I^\diamond(\sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0) \mid n \in \mathbb{N}^+, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{L}(\Omega), \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X\} \\
&\geq \bigvee\{\sum_{i=1}^n \lambda_i I^\diamond(H(\chi_i)) + \lambda_0 \mid n \in \mathbb{N}^+, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{L}(\Omega), \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X\} \\
&= \bigvee\{\sum_{i=1}^n \lambda_i (I^\diamond \circ H)(\chi_i) + \lambda_0 \mid n \in \mathbb{N}^+, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{L}(\Omega), \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X\} \\
&= ((I^\diamond \circ H)^\diamond)(X).
\end{aligned}$$

Sei nun H ein extensiv supremumabgeschlossener Kernoperator, I^\diamond linear und Ω' endlich. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $M \subseteq X_\downarrow^H$ von Spielen mit:

$$\|\bigvee X_\downarrow^H - \bigvee M\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Da H extensiv supremumabgeschlossen ist gilt:

$$\bigvee M = \sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0$$

für geeignete $n \in \mathbb{N}^+, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{L}(\Omega)$. Da H^\diamond wegen Lemma 3.4.8 intensiv ist, gilt:

$$\bigvee M = \sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 \leq \bigvee X_\downarrow^H = H^\diamond(X) \leq X$$

und somit ist wegen der Idempotenz von H und wegen der Linearität von I^\diamond das Spiel

$$\begin{aligned}
I^\diamond(\bigvee M) &= I^\diamond(\sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i I^\diamond(H(\chi_i)) + \lambda_0 \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i I^\diamond(H(H(\chi_i))) + \lambda_0 \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i (I^\diamond \circ H)(H(\chi_i)) + \lambda_0
\end{aligned}$$

aus $X_\downarrow^{(I^\diamond \circ H)}$ und es folgt $\bigvee M \leq (I^\diamond \circ H)^\diamond(X)$. Da ε und beliebig war und da I^\diamond wegen Lemma 3.2.15(i) punktweise stetig ist (d.h. alle $I_{\omega''}^\diamond$ sind stetig bezüglich der Supremumsnorm) folgt insgesamt:

$$(I^\diamond \circ H^\diamond)(X) = I^\diamond(\bigvee X_\downarrow^H) \leq (I^\diamond \circ H)^\diamond(X).$$

■

Lemma 3.4.15. Eine intensive verallgemeinerte Prävission H vermeidet immer sicheren Verlust und für ihre natürliche Extension H^\diamond gilt:

$$\forall X \in \text{dom}(H) : H^\diamond(H(X)) = H(X).$$

Beweis: Da H intensiv ist gilt für $X_1, \dots, X_n \in \text{dom}(H)$ und $\omega \in \Omega$:

$$\sup_{\omega' \in \Omega} \sum_{i=1}^n X_i(\omega') \geq \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)(\omega) \geq \left(\sum_{i=1}^n H(X_i) \right)(\omega),$$

d.h. H vermeidet sicheren Verlust. Da für $n \in \mathbb{N}^+$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\chi_1, \dots, \chi_n, X \in \text{dom}(H)$ wegen der Intensivität von H die Implikation

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq H(X) \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0 \leq H(X)$$

gilt folgt $H^\diamond(H(X)) \leq H(X)$ und damit $H^\diamond(H(X)) = H(X)$. ■

Wir betrachten nun einige Beispiele von Kernoperatoren und ihre natürlichen Extensionen.

(a) Sei $\theta \subseteq \Omega \times \Omega$ eine reflexive und transitive Relation (, also z.B. eine Äquivalenz - oder eine Ordnungsrelation) auf Ω . Der Operator

$$H : 2^\Omega \longrightarrow 2^\Omega : X \mapsto \{\omega \in \Omega \mid \omega\theta \subseteq X\}$$

mit $\omega\theta = \{\omega' \in \Omega \mid \omega\theta\omega'\}$ ist dann ein Kernoperator:

- **Monotonie:** Aus $X \subseteq Y$ folgt $H(X) = \{\omega \in \Omega \mid \omega\theta \subseteq X\} \subseteq \{\omega \in \Omega \mid \omega\theta \subseteq Y\} = H(Y)$.
- **Intensivität:** Da θ reflexiv ist gilt für $X \subseteq \Omega$ die Implikation $\omega \in H(X) \implies \omega\theta \subseteq X \implies \omega \in \omega\theta \subseteq X$, also gilt $H(X) \subseteq X$.
- **Idempotenz:** Da θ transitiv und reflexiv ist gilt für $X \subseteq \Omega$ die Äquivalenz

$$\begin{aligned} \omega \in H(X) &\iff \omega\theta \subseteq X \\ &\iff \omega\theta\omega' \implies \omega' \in X \\ &\iff \omega\theta\omega' \implies [\omega'\theta\omega'' \implies \omega'' \in X] \\ &\iff \omega\theta\omega' \implies \omega'\theta \subseteq X \\ &\iff \omega\theta\omega' \implies \omega' \in H(X) \\ &\iff \omega\theta \subseteq H(X) \\ &\iff \omega \in H(H(X)), \end{aligned}$$

d.h. es gilt $H(X) = H(H(X))$.

Insbesondere ist H auch infimumtreu, denn für $X, Y \subseteq \Omega$ gilt die Äquivalenz $\omega \in H(X) \cap H(Y) \iff [\omega\theta \subseteq X \ \& \ \omega\theta \subseteq Y] \iff [\omega\theta \subseteq X \cap Y] \iff \omega \in H(X \cap Y)$. Wir zeigen nun, dass die Abbildung

$$I : \mathcal{L}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}(\Omega) : X \mapsto I(X) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \inf_{\omega' \in \omega\theta} X(\omega')$$

die natürliche Extension von H ist. Auf 2^Ω stimmen I und H miteinander überein, denn für beliebiges $X \in 2^\Omega$ gilt:

$$\begin{aligned} \omega \in H(X) &\iff \omega\theta \subseteq X \\ &\iff \forall \omega' \in \omega\theta : X(\omega') = 1 \\ &\iff \inf_{\omega' \in \omega\theta} X(\omega') = 1 \\ &\iff (I(X))(\omega) = 1 \\ &\iff \omega \in I(X). \end{aligned}$$

Witerhin ist I kohärent, denn für $X, Y \in \mathcal{L}(\Omega), \omega \in \Omega, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gelten:

$$\text{(P1): } (I(X))(\omega) = \inf_{\omega' \in \omega\theta} X(\omega') \geq \inf_{\omega' \in \Omega} X(\omega')$$

$$\text{(P2): } (I(\lambda X))(\omega) = \inf_{\omega' \in \omega\theta} \lambda X(\omega') = \lambda \inf_{\omega' \in \omega\theta} X(\omega') = \lambda(I(X))(\omega)$$

$$\text{(P3): } (I(X+Y))(\omega) = \inf_{\omega' \in \omega\theta} (X+Y)(\omega') \geq \inf_{\omega' \in \omega\theta} X(\omega') + \inf_{\omega' \in \omega\theta} Y(\omega') = (I(X))(\omega) + (I(Y))(\omega).$$

Es gilt also $I \geq H^\diamond$. Für die Ungleichung $H^\diamond \geq I$ betrachte für $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ und $\omega \in \Omega$ das Spiel $\chi_1 = \mathbf{1}_{\omega\theta}$ und die Koeffizienten $\lambda_0 = \inf_{\omega' \in \Omega} X(\omega')$ sowie $\lambda_1 = \inf_{\omega' \in \omega\theta} X(\omega') - \lambda_0 \geq 0$. Dann gilt $\lambda_0 + \lambda_1 \chi_1 \leq X$ und somit:

$$(H^\diamond(X))(\omega) \geq (\lambda_0 + \lambda_1 H(\chi_1))(\omega) = \lambda_0 + \lambda_1 = \lambda_0 + \inf_{\omega' \in \omega\theta} X(\omega') - \lambda_0 = (I(X))(\omega).$$

Da H infimum- und supremumabgeschlossen ist, ist H auch extensiv infimumabgeschlossen und deshalb ist die Natürliche Extension $I = H^\diamond$ infimumtreu. Dies bedeutet insbesondere, dass $I = id_{\mathcal{L}(\Omega)} \circ I$ vollständig monoton ist, denn I ist infimumtreu und $id_{\mathcal{L}(\Omega)}$ ist, wie wir noch sehen werden, vollständig monoton und monoton.

(b) Sei $S \subseteq 2^\Omega$ ein Mengensystem mit $\emptyset, \Omega \in S$. Definiere dann den Operator

$$H : 2^\Omega \longrightarrow 2^\Omega : X \mapsto \bigcup_{T \in S, T \subseteq X} T$$

Dann ist H wieder ein Kernoperator:

- **Monotonie:** $X \subseteq Y \implies [T \subseteq X \implies T \subseteq Y] \implies \bigcup_{T \in S, T \subseteq X} T \subseteq \bigcup_{T \in S, T \subseteq Y} T$

- **Intensivität:** $\bigcup_{T \in S, T \subseteq X} T \subseteq X$

- **Idempotenz:** Zunächst gilt für alle $T \in S$ die Gleichheit $T = H(T)$, denn wegen der Intensivität von H gilt

$$H(T) \subseteq T$$

und wegen $T \in S$ und $T \subseteq T$ gilt

$$H(T) = \bigcup_{T' \in S, T' \subseteq T} T' \supseteq T.$$

Für $X \subseteq \Omega$ ist nun wegen der Intensivität von H nur noch die Relation $H(H(X)) \supseteq H(X)$ zu zeigen. Für $\omega \in H(X)$ existiert ein $T \in S$ mit $T \subseteq X$ und $\omega \in T$. Da H monoton ist folgt $T = H(T) \subseteq H(X)$ und somit folgt $\omega \in H(H(X))$.

Ist das Mengensystem S abgeschlossen bezüglich Komplementbildung und beliebigen Schnitten (d.h. es gilt $T \in S \implies T^c \in S$ und $M \subseteq S \implies \bigcap M \in S$) oder ist S endlich und abgeschlossen bezüglich Komplementbildung, so ist die natürliche Extension von H durch

$$I : \mathcal{L}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}(\Omega) : \omega \mapsto \inf_{\omega' \in \omega\theta} X(\omega')$$

mit

$$\theta = \{(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega \mid \forall T \in S : T(\omega) = T(\omega')\}$$

gegeben. Die Relation θ ist offensichtlich nach Konstruktion eine Äquivalenzrelation und wenn S bezüglich Komplementbildung und beliebigen Schnitten abgeschlossen ist, dann ist H genau der Operator aus Beispiel (a), denn für $X \subseteq \Omega$ und $\omega \in \Omega$ gilt:

$$\begin{aligned} \omega \in \bigcup_{T \in S, T \subseteq X} T &\iff \exists T \in S : T \subseteq X \ \& \ \omega \in T \\ &\iff \exists T \in S : [\omega' \notin X \implies \omega' \notin T] \ \& \ \omega \in T \\ &\stackrel{(*)}{\iff} \omega' \notin X \implies [\exists T \in S : [\omega' \notin X \implies \omega' \notin T] \ \& \ \omega \in T] \\ &\iff \omega' \notin X \implies [\exists T \in S : \omega' \notin T \ \& \ \omega \in T] \\ &\stackrel{(**)}{\iff} \omega' \notin X \implies \exists T \in S : T(\omega') \neq T(\omega) \\ &\iff [\forall T : T(\omega) = T(\omega')] \implies \omega' \in X \\ &\iff \omega\theta\omega' \implies \omega' \in X \\ &\iff \omega \in \{\omega \in \Omega \mid \omega\theta \subseteq X\} \end{aligned}$$

(um die Rückrichtung der Äquivalenz $(*)$ zu sehen betrachte $T = \bigcap_{T' \in S, \omega \in T'} T' \in S$ und die Äquivalenz $(**)$ gilt wegen der Abgeschlossenheit von S bezüglich Komplementbildung). Also ist in diesem Fall I die natürliche Extension von H . Für den Fall, dass $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ endlich und abgeschlossen bezüglich Komplementbildung ist gilt für $(*)$ nur die Hinrichtung. Das bedeutet aber, dass H von I auf 2^Ω dominiert wird. Da I mit den Argumenten aus Beispiel (a) kohärent ist, ist also nur noch zu zeigen, dass $I \leq H^\diamond$ gilt. Betrachte dazu die durch θ erzeugte Partition

$$M = \{\omega\theta \mid \omega \in \Omega\} = \{ \{ \omega \in \Omega \mid (S_1(\omega), S_2(\omega), \dots, S_n(\omega)) = v \} \mid v \in \{0, 1\}^n \setminus \{\emptyset\} \},$$

die offensichtlich endlich ist. Seien nun $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ und $\omega \in \Omega$ beliebig aber fest. Dann existiert für jedes $m \in M \setminus \{\omega\} =: \{m_1, \dots, m_n\}$ ein $\chi_m \in \mathcal{S}$ mit $\chi_m(\omega') = 0$ für alle $\omega' \in m$ und $\chi_m(\omega') = 1$ für alle $\omega' \in \omega\theta$. Mit

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= n \cdot \inf_{\omega' \in \Omega} X(\omega') \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \inf_{\omega' \in \omega\theta} X(\omega') - \inf_{\omega' \in \Omega} X(\omega') \\ \chi_1 &= \chi_{m_1} \\ &\vdots \\ \chi_n &= \chi_{m_n}\end{aligned}$$

folgt:

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0\right)(\omega'') \leq \begin{cases} n \cdot \lambda_1 + \lambda_0 = \inf_{\omega' \in \omega\theta} X(\omega') \leq X(\omega'') & \text{falls } \omega'' \in \omega\theta \\ (n-1) \cdot \lambda_1 + \lambda_0 = \inf_{\omega' \in \Omega} X(\omega') \leq X(\omega'') & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit:

$$(H^\circ(X))(\omega) \geq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i H(\chi_i) + \lambda_0\right)(\omega) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0\right)(\omega) = \inf_{\omega' \in \omega\theta} X(\omega') = (I(X))(\omega).$$

(c) Für den Multimengenverband \mathbb{N}_k^Ω mit $k \geq 2$ ist die Trägerabbildung

$$\text{supp} : \mathbb{N}_k^\Omega \longrightarrow 2^\Omega : X \mapsto \text{supp}(X) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq 1\}$$

ein Kernoperator, denn für alle $X, Y \in \mathbb{N}_k^\Omega$ gelten:

- $X \leq Y \implies [\omega \in \text{supp}(X) \implies X(\omega) \geq 1 \implies Y(\omega) \geq X(\omega) \geq 1 \implies \omega \in \text{supp}(Y)]$
- $\omega \in \text{supp}(X) \implies X(\omega) \geq 1 \implies X(\omega) \geq 1 = (\text{supp}(X))(\omega)$
- $\omega \notin \text{supp}(X) \implies X(\omega) \geq 0 = (\text{supp}(X))(\omega)$
- $\omega \in \text{supp}(X) \iff (\text{sup}(X))(\omega) = 1 \iff (\text{supp}(X))(\omega) \geq 1 \iff \omega \in \text{supp}(\text{supp}(X)).$

Die natürliche Extension von H ist die identische Abbildung $id_{\mathcal{L}(\Omega)}$, denn diese ist offensichtlich kohärent und dominiert H auf \mathbb{N}_k^Ω und für $X \in \mathbb{N}_k^\Omega$ und $\omega \in \Omega$ gilt mit $\lambda_0 = \inf_{\omega' \in \Omega} X(\omega')$ und $\lambda_1 = X(\omega) - \lambda_0$ sowie $\chi_1 = \mathbb{1}_{\{\omega\}}$:

$$\lambda_0 + \lambda_1 \chi_1 \leq X$$

und folglich

$$((H^\circ)(X))(\omega) \geq (\lambda_0 + \lambda_1 \text{supp}(\chi_1))(\omega) = (\lambda_0 + \lambda_1 \chi_1)(\omega) = X(\omega) = ((id_{\mathcal{L}(\Omega)})(X))(\omega).$$

(d) Als abschließendes Beispiel betrachten wir einen konkreten Kernoperator H auf 2^Ω mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ und die Verknüpfung von H mit einer linearen gewöhnlichen Prävision

$$P : \mathcal{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \frac{X(\omega_1) + X(\omega_2) + X(\omega_3) + X(\omega_4)}{4}.$$

Der Operator H , seine natürliche Extension H^\diamond , die Verknüpfung $P \circ H^\diamond$ sowie die natürliche Extension $(P \circ H)^\diamond$ gibt Tabelle 3.1 wieder (H_i bzw. H_i^\diamond stehen für $(H(X))(\omega_i)$ bzw. $(H^\diamond(X))(\omega_i)$ und $(P \circ H)^\diamond$ bzw. $(P \circ H^\diamond)$ stehen für $(P \circ H)^\diamond(X)$ bzw. $(P \circ H^\diamond)(X)$):

X	$X(\omega_1)$	$X(\omega_2)$	$X(\omega_3)$	$X(\omega_4)$	H_1	H_2	H_3	H_4	H_1^\diamond	H_2^\diamond	H_3^\diamond	H_4^\diamond	$(P \circ H)^\diamond$	$(P \circ H^\diamond)$
X_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_2	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.25
X_3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_4	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.25
X_5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.25	0.25
X_6	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0.5	0.5
X_7	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.25	0.25
X_8	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0.5	0.5
X_9	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0.25	0.25
X_{10}	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0.5	0.5
X_{11}	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0.25	0.25
X_{12}	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0.5	0.5
X_{13}	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0.5	0.5
X_{14}	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0.75	0.75
X_{15}	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0.75	0.75
X_{16}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabelle 3.1.: Der Kernoperator H und die daraus abgeleiteten Operatoren H^\diamond , $(P \circ H)^\diamond$ und $(P \circ H^\diamond)$

Das H wirklich ein Kernoperator ist sieht man durch direktes nachrechnen. Es ist zu sehen, dass $(P \circ H)^\diamond < P \circ H^\diamond$ gilt. Dies wirft die Frage auf, welcher Wert der „richtige“ Wert z.B. des Spieles X_2 ist. Da wir die Definition der natürlichen Extension einer gewöhnlichen Prävision in mathematisch naheliegender Weise auf verallgemeinerte Prävisionen übertragen haben ohne die konkrete Interpretation zu beachten kann der Wert $(P \circ H^\diamond)(X_2)$ nicht automatisch als maximaler Kaufpreis für das Spiel X_2 angesehen werden. Fasst man $H(X)$ als Wert des Spieles X auf in dem Sinne, dass das Spiel X mindestens so viel Wert ist wie das Spiel $H(X)$, so wäre die natürliche Extension $H^\diamond(X)$ nicht immer angemessen als der aus H durch „Rationalitätserwägungen“ folgende „Wert“ des Spieles X interpretierbar, denn das Supremum in der Definition der natürlichen Extension hat für reelle Zahlen eine viel einfachere Gestalt als für Spiele: Das Supremum einer endlichen Teilmenge M von reellen Zahlen ist wieder aus M , für Spiele gilt dies aber nicht. Ein Beispiel soll die Konsequenzen dieses Unterschiedes zeigen:

Sei $\Omega = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die Menge aller ganzen Zahlen, die nicht Null sind. Es werde eine faire Münze geworfen und falls Kopf fällt wird eine positive ganze Zahl (nach irgendeiner unbekanntem Methode) ausgewählt. Fällt Zahl, so wird eine negative Zahl ausgewählt. Das Spiel $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ erbringt den Gewinn $X(i)$, falls die Zahl i ausgewählt wurde. Dann ist es naheliegend jedem Spiel $X \in 2^\Omega$

den maximalen Kaufpreis

$$P(X) = \begin{cases} 1 & \text{falls } X = \Omega \\ 0.5 & \text{falls } X \neq \Omega \text{ und } X \supseteq \mathbb{N}^+ \\ 0.5 & \text{falls } X \neq \Omega \text{ und } X \supseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zuzuordnen. Weiterhin sind einelementige Spiele $\{i\}$ als gleichwertig zu behandeln und man könnte den Operator

$$H : \{\{i\} | i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow 2^\Omega :$$

$$\{i\} \mapsto \begin{cases} \{\frac{i}{2}\} & \text{falls } i \text{ gerade} \\ \{-\frac{i+1}{2}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

konstruieren und damit aussagen, dass ein einelementiges Spiel $\{i\}$ mindestens soviel wert ist wie das Spiel $H(\{i\})$. Betrachten wir aber die natürliche Extension von H , dann gilt für das Spiel $X = \mathbb{N}^+$ und beliebiges $k \in \mathbb{N}^+$:

$$\{2k\} \leq X, \quad \{2k-1\} \leq X$$

also folgt :

$$H^\diamond(X) \geq H(\{2k\}) = \{k\}$$

und

$$H^\diamond(X) \geq H(\{2k-1\}) = \{-k\},$$

woraus $H^\diamond(X) \geq \Omega$ folgt, d.h. das Spiel X ist mindestens soviel wert wie das Spiel Ω , also mindestens 1. Dies steht aber im Widerspruch zur konkreten Interpretation, denn das Spiel X ist maximal 0.5 wert.

Ist die Komposition $(P \circ H)(X)$ wirklich als akzeptabler Kaufpreise interpretierbar, so beschreibt die natürliche Extension $(P \circ H)^\diamond$ die aus dieser Aggregation folgenden maximalen Kaufpreise. Da aber nur auf die Komposition $P \circ H$ zurückgegriffen wird, geht die eventuell in H vorhandene „Information“ verloren. Wir zeigen nun eine Interpretation von H und P aus Beispiel (d), für die das der Fall ist: Seien vier Urnen U_1 bis U_4 gegeben. Jede dieser Urnen enthält rote, gelbe, blaue und schwarze Kugeln in unbekanntem Mengen. Es wird zufällig (mit gleichen Wahrscheinlichkeiten von jeweils $\frac{1}{4}$) eine Urne ausgewählt und aus ihr eine Kugel gezogen und ihre Farbe festgestellt. Der Grundraum Ω ist also der Raum $\Omega = \{\text{rot, gelb, blau, schwarz}\}$ Die Spalten H_1 bis H_4 stehen dabei für das über die Urnen U_1 bis U_4 verfügbare Wissen: $H_1(X_6) = 1$ bedeutet, dass auf X_6 mit einem Einsatz von 1 gewettet werden kann, d.h. es ist bekannt, dass Urne U_1 nur rote und blaue Kugeln enthält. Aus $H_1(X_{10}) = 1$ ist weiterhin ersichtlich, dass U_1 ebenfalls nur aus roten und schwarzen Kugeln besteht. Daraus folgt, dass U_1 nur rote Kugeln enthält. Dies

zeigt sich in der Tatsache, dass $H_1^\diamond(X_{10}) = 1$ gilt. Man kann also auf rot mit einem Einsatz von mindestens $\frac{1}{4}$ wetten, was sich auch in $(P \circ H^\diamond)(X_2) = 0.25$ widerspiegelt. Betrachtet man aber nicht jede Urne für sich, sondern nur die durch die Komposition $(P \circ H)$ beschriebenen Informationen, so verliert man das Wissen, dass U_1 nur aus roten Kugeln besteht. Dies zeigt sich wieder in $(P \circ H)^\diamond(X_2) = 0$.

3.4.2. Adjunktionen

Definition 3.4.16. Seien $\mathbb{P} = (P, \leq_P)$ und $\mathbb{Q} = (Q, \leq_Q)$ geordnete Mengen und $f : P \rightarrow Q$ sowie $g : Q \rightarrow P$ Abbildungen. Das Paar (f, g) bildet eine **Adjunktion** bezüglich (\mathbb{P}, \mathbb{Q}) , falls für alle $p \in P$ und $q \in Q$ gilt:

$$f(p) \leq_Q q \iff p \leq_P g(q). \quad (*)$$

In diesem Fall heißt f **residuiert** und g **residual**. Das Paar (f, g) bildet eine **Galoisverbindung** bezüglich (\mathbb{P}, \mathbb{Q}) , falls (f, g) eine Adjunktion bezüglich (P, \leq_P) und (Q, \geq_Q) bildet.

Lemma 3.4.17. Für eine Adjunktion (f, g) bezüglich $\mathbb{P} = (P, \leq_P)$ und $\mathbb{Q} = (Q, \leq_Q)$ gilt:

- (a) $g \circ f$ ist extensiv und $f \circ g$ ist intensiv.
- (b) f und g sowie $f \circ g$ und $g \circ f$ sind monoton.
- (c) $f \circ g \circ f = f$ und $g \circ f \circ g = g$.
- (d) $g \circ f$ ist ein Hüllenoperator und $f \circ g$ ist ein Kernoperator
- (e) f und g legen einander eindeutig fest:

$$\begin{aligned} \forall q \in Q : g(q) &= \max\{p \in P \mid f(p) \leq_Q q\} = \max f^{-1}[\downarrow q] \\ \forall p \in P : f(p) &= \min\{q \in Q \mid p \leq_P g(q)\} = \min g^{-1}[\uparrow p] \end{aligned}$$

- (f) f erhält existierende Suprema und g erhält existierende Infima.

Beweis:

- (a) Seien $p \in P$ und $q \in Q$ beliebig. Aus $f(p) \leq_Q f(p)$ bzw. $g(q) \leq_P g(q)$ folgt mit $(*)$ $p \leq_P g(f(p)) = (g \circ f)(p)$ und $(f \circ g)(q) = f(g(q)) \leq_Q q$.
- (b) Seien $p_1, p_2 \in P$ mit $p_1 \leq_P p_2$ und $q_1, q_2 \in Q$ mit $q_1 \leq_Q q_2$. Nach (a) gilt $p_1 \leq_P p_2 \leq_P g(f(p_2))$ und $f(g(q_1)) \leq_Q q_1 \leq_Q q_2$ woraus mit $(*)$ $f(p_1) \leq_Q f(p_2)$ und $g(q_1) \leq_P g(q_2)$ folgt. Weiterhin sind $f \circ g$ und $g \circ f$ als Komposition monotoner Abbildungen ebenfalls monoton.

(c) Seien $p \in P$ und $q \in Q$ beliebig. Dann folgt mit (a) und (b):

$$(f \circ g \circ f)(p) = (f \circ g)(f(p)) \leq_Q f(p) \leq_Q f((g \circ f)(p)) = (f \circ g \circ f)(p)$$

bzw.

$$(g \circ f \circ g)(q) = g((f \circ g)(q)) \leq_P g(q) \leq_P (g \circ f)(g(q)) = (g \circ f \circ g)(q).$$

(d) Wegen (a) und (b) ist nur noch die Idempotenz von $g \circ f$ und $f \circ g$ zu zeigen. Aus (c) folgt:

$$(g \circ f) \circ (g \circ f) = (g \circ f \circ g) \circ f = g \circ f$$

$$\text{bzw. } (f \circ g) \circ (f \circ g) = (f \circ g \circ f) \circ g = f \circ g.$$

(e) Sei $q \in Q$ beliebig. Dann gilt nach (a) $f(g(q)) \leq_Q q$ und somit ist $g(q)$ aus $f^{-1}[\downarrow q]$. Es ist also nur noch für alle $p \in P$ mit $f(p) \leq_P q$ zu zeigen, dass $p \leq_P g(q)$ gilt. Dies folgt aber direkt aus (*). Analog folgt für beliebiges $p \in P$: $p \leq_P g(f(p))$, und für alle $q \in Q$ mit $p \leq_P g(q)$ gilt die Ungleichung $f(p) \leq_Q q$.

(f) Besitze $M \subseteq P$ ein Supremum. Wir zeigen, dass $f(\bigvee M)$ das Supremum von $f[M]$ ist. Da f monoton ist ist $f(\bigvee M)$ eine obere Schranke von $f[M]$. Sei $q \in Q$ eine weitere obere Schranke von $f[M]$. Dann ist $g(q)$ eine obere Schranke von M und somit folgt $\bigvee M \leq_P g(q)$ bzw. $f(\bigvee M) \leq_Q q$. Also ist $f(\bigvee M)$ die kleinste obere Schranke von $f[M]$, d.h., es gilt $f(\bigvee M) = \bigvee(f[M])$. Für eine Menge $N \subseteq Q$ mit existierendem Infimum ist analog $g(\bigwedge N)$ eine untere Schranke von $g[N]$ und für jede weitere untere Schranke p von $g[N]$ folgt $\forall n \in N : f(p) \leq_Q n$ also $f(p) \leq_Q \bigwedge N$ bzw. $p \leq_P g(\bigwedge N)$ und somit gilt $g(\bigwedge N) = \bigwedge g[N]$.

■

Bemerkung 3.4.18. Für eine Galoisverbindung (f, g) sind sowohl f als auch g Hüllenoperatoren.

3.4.3. Eigenschaften der identischen Abbildung

Eine triviale Möglichkeit, ein Spiel $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ zu „bemessen“ ist, das Spiel selbst zu betrachten. Dies wäre realisierbar durch einen „Maßraum“ $\mathcal{L}(\Omega)$ und die identische Abbildung $id_{\mathcal{L}(\Omega)} : \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(\Omega) : X \mapsto X$. Diese bemißt Spiele durch sich selbst, enthält also alle Informationen über die Spiele. Das dies unpraktikabel bzw. wenig aussagekräftig ist, scheint klar zu sein. Es ist aber durchaus naheliegend, die Struktureigenschaften der identischen Abbildung zu studieren und nach Möglichkeit in einer geeigneten Weise auf eine Messfunktion $P : \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathcal{M}$ mit einem noch zu bestimmenden „Maßraum“ zu übertragen. Da man davon ausgehen muß, dass eine praktikable Messfunktion P nicht alle Informationen aus $\mathcal{L}(\Omega)$ konserviert, können wohl nicht alle Struktureigenschaften der identischen Abbildung übertragen werden. Im Folgenden werden einige Eigenschaften der identischen Abbildung herausgestellt: $id_{\mathcal{L}(\Omega)}$ ist:

- (a) monoton
- (b) additiv
- (c) modular
- (d) sowohl vollständig monoton als auch vollständig alternierend
- (e) supremumtreu
- (f) infimumtreu
- (g) idempotent
- (h) extensiv
- (i) intensiv.

Bis auf Eigenschaft (d) ergeben sich alle Eigenschaften unmittelbar aus den Definitionen. Nun zum Beweis von (d):

Seien $k \geq 2, X_1, \dots, X_k \in \mathcal{L}(\Omega)$. Es ist zu zeigen:

$$\bigvee_{i=1}^k X_i = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \bigwedge_{i \in T} X_i. \quad (*)$$

Für ein beliebiges aber festes $\omega \in \Omega$ bezeichne $X_{[1]}, \dots, X_{[k]}$ die in aufsteigender Größe geordneten $X_i(\omega)$. Nun gilt

$$\left(\sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \bigwedge_{i \in T} X_i \right)(\omega) = \sum_{i=1}^k a_i X_{[i]}$$

für geeignete a_i , denn $(\bigwedge_{i \in T} X_i)(\omega) = \min\{X_{[i]} \mid i \in T\}$. Da ein $X_{[i]}$ nur als Infimum von $X_{[j]}$ mit $j \geq i$ auftreten kann und da $X_{[i]}$ selbst an diesem Infimum beteiligt sein muss gibt es z.B. für

ein Infimum aus zwei $X_{[j]}$ genau $\binom{n_i}{2-1}$ Möglichkeiten ein Infimum $X_{[i]}$ zu erhalten, wobei n_i die Anzahl der $X_{[j]} \geq X_{[i]}$ mit $j \neq i$ ist (falls bestimmte $X_{[i]}, X_{[j]}$ gleich sind, dann unterscheide sie formal, d.h. z.B. $X_{[i]} \wedge X_{[i+1]} = X_{[i]} \neq X_{[i+1]}$ und die obere Aussage bleibt richtig). Es folgt mit dem binomischen Lehrsatz:

$$a_i = \binom{n_i}{0} - \binom{n_i}{1} + \binom{n_i}{2} - \dots \pm \binom{n_i}{n_i} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n_i \geq 1 \\ 1 & \text{falls } n_i = 0. \end{cases}$$

Das heißt nur a_k ist 1 und es folgt:

$$\left(\bigvee_{i=1}^k X_i\right)(\omega) = X_{[k]} = 1 \cdot X_{[k]} = \left(\sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \bigwedge_{i \in T} X_i\right)(\omega).$$

Da ω beliebig war folgt (*). ■

Bemerkung 3.4.19. Die Gleichung (*) wird im Folgenden als **Zerlegungsgleichung** bezeichnet. Auch für die Operationen \cup und \cap gilt eine analoge Gleichung:

$$\bigcup_{i=1}^k X_i = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \bigcap_{i \in T} X_i \quad (**)$$

Beweis: Für $k = 2$ ist (**) gleichbedeutend mit $X_1 \cup X_2 = X_1 + X_2 - X_1 \cap X_2$. Dies folgt aber genau aus der Definition von \cup und \cap (siehe Definition 3.1.1). Für beliebige k folgt dann die Behauptung per vollständiger Induktion:

Gelte $\bigcup_{i=1}^k X_i = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \bigcap_{i \in T} X_i$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{k+1} X_i &= \left(\bigcup_{i=1}^k X_i\right) \cup X_{k+1} \\ &= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \bigcap_{i \in T} X_i + X_{k+1} - \left[\sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \bigcap_{i \in T} X_i\right] \cap X_{k+1} \\ &= \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k+1\} \\ k+1 \notin T}} (-1)^{|T|+1} \bigcap_{i \in T} X_i + \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k+1\} \\ k+1 \in T, |T| \geq 2}} (-1)^{|T|+1} \bigcap_{i \in T} X_i + X_{k+1} \\ &= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k+1\}} (-1)^{|T|+1} \bigcap_{i \in T} X_i. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 3.4.20. Schreibt man die Zerlegungsgleichung in der Form

$$\bigcup_{i=1}^k X_i + \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |T|=2}} \bigcap_{i \in T} X_i + \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |T|=4}} \bigcap_{i \in T} X_i + \dots = \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |T|=1}} \bigcap_{i \in T} X_i + \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |T|=3}} \bigcap_{i \in T} X_i + \dots$$

, so sind die Summanden

$$\begin{aligned} S_0 &:= \bigcup_{i=1}^k X_i \\ S_1 &:= \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |T|=1}} \bigcap_{i \in T} X_i \\ S_2 &:= \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |T|=2}} \bigcap_{i \in T} X_i \\ S_3 &:= \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |T|=3}} \bigcap_{i \in T} X_i \\ &\vdots \\ S_k &:= \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |T|=k}} \bigcap_{i \in T} X_i = \bigcap_{i=1}^k X_i \end{aligned}$$

komonoton, falls alle X_i Mengen sind.

Beweis: Da alle X_i außerhalb von $V := \bigcup_{i=1}^k X_i$ konstant gleich 0 sind und da S_0 auch innerhalb von V konstant ist genügt es nur ω aus V und S_l mit $l \geq 1$ zu betrachten. Seien also $\omega_1, \omega_2 \in V, l \geq 1$ gegeben mit $S_l(\omega_1) < S_l(\omega_2)$. Seien weiter n_1 bzw. n_2 die Anzahl der X_i , die ω_1 bzw. ω_2 enthalten. Dann gilt: $S_l(\omega_1) = \binom{n_1}{l} < \binom{n_2}{l} = S_l(\omega_2)$ und es folgt $n_1 < n_2$ und schließlich für beliebiges $1 \leq m \leq k$: $S_m(\omega_1) = \binom{n_1}{m} \leq \binom{n_2}{m} = S_m(\omega_2)$. ■

Ein lineare Prävision $P : \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt die Eigenschaften (a) bis (d).

Lemma 3.4.21. Für eine monotone Abbildung $H : (P, \leq) \rightarrow (2^\Omega, \subseteq)$ sind äquivalent:

- (a) H ist infimumtreu.
- (b) H ist vollständig monoton.
- (c) H ist supermodular.

Beweis:

„ (a) \Rightarrow (b)“: Sei $k \geq 2$ und $p_1, \dots, p_k \in P$ beliebig. Mit Lemma 3.4.2 (b) und der Zerlegungsgleichung folgt:

$$H\left(\bigvee_{i=1}^k p_i\right) \geq \bigcup_{i=1}^k H(p_i) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \bigcap_{i \in T} H(p_i) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} H\left(\bigwedge_{i \in T} p_i\right).$$

„ (b) \Rightarrow (c)“: folgt mit $k = 2$.

„ (c) \Rightarrow (a)“: Wäre H nicht infimumtreu würden nach Lemma 3.4.2 (a) Elemente $p, q \in P$ mit

$$H(p) \cap H(q) \not\supseteq H(p \wedge q)$$

existieren. Das bedeutet aber, dass ein $\omega \in \Omega$ mit

$$(H(p))(\omega) = (H(q))(\omega) = 1$$

und

$$(H(p \wedge q))(\omega) = 0$$

existiert. Daraus folgt aber bereits

$$(H(p) + H(q))(\omega) = 2 > 1 = 0 + 1 \geq (H(p \wedge q) + H(p \vee q))(\omega),$$

was im Widerspruch zur Supermodularität von H steht.

■

3.5. Dempster-Shafer-Theorie

3.5.1. Mengenwertige Abbildungen

In [8] betrachtet Dempster mengenwertige Abbildungen $\Gamma : \Omega \longrightarrow 2^S$. Dabei ist Ω der (hier endliche) Grundraum eines Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{F}, P) und S eine beliebige Menge. Ein $\omega \in \Omega$ beschreibt einen möglichen „Zustand der Welt“ mit zugeordneter Wahrscheinlichkeit $P(\{\omega\})$. Man geht nun davon aus, dass ω nicht direkt beobachtbar ist, nur die Konsequenzen von ω . S ist die Menge aller beobachtbaren Konsequenzen (für jeden Zustand der Welt sollte genau eine Konsequenz $s \in S$ beobachtet werden). Wenn ω der wahre Zustand der Welt ist, dann gelte für die Konsequenz s : $s \in \Gamma(\omega)$. Eine Funktion heiße mit Γ verträglich, falls für alle $\omega \in \Omega$ der Funktionswert $f(\omega)$ in $\Gamma(\omega)$ liegt. Die Menge aller mit Γ verträglichen Funktionen sei mit F_Γ bezeichnet. Die Frage lautet nun, wie groß die „Wahrscheinlichkeit“ ist, dass man eine Konsequenz $s \in T \subseteq S$ beobachtet. Je nachdem, welche Konsequenz genau aus jedem Zustand folgt, ist die Wahrscheinlichkeit $P(T)$ verschieden, man kann also nur obere und untere Schranken für P angeben:

$$\underline{P}(T) := \inf\{P(f^{-1}[T]) \mid f \in F_\Gamma\}$$

$$\bar{P}(T) := \sup\{P(f^{-1}[T]) \mid f \in F_\Gamma\}.$$

Um diese Ausdrücke zu vereinfachen führen wir zunächst für $T \subseteq S$ folgende Hilfsfunktionen ein:

$$* : 2^S \longrightarrow 2^\Omega : T \mapsto T_* := \{\omega \in \Omega \mid \Gamma(\omega) \subseteq T\}$$

$$* : 2^S \longrightarrow 2^\Omega : T \mapsto T^* := \{\omega \in \Omega \mid \Gamma(\omega) \cap T \neq \emptyset\}.$$

Bemerkung 3.5.1. Wenn wir Γ als Funktion $2^\Omega \longrightarrow 2^S : X \mapsto \Gamma([X]) := \bigcup_{x \in X} \Gamma(x)$ betrachten, so bilden Γ und $*$ eine Adjunktion bezüglich $((2^\Omega, \subseteq), (2^S, \subseteq))$, d.h. für alle $X \in 2^\Omega$ und $T \in 2^S$ gilt die Äquivalenz

$$X \subseteq T_* \iff \Gamma([X]) \subseteq T.$$

Dies folgt direkt aus den Definitionen:

$$\begin{aligned} X \subseteq T_* &\iff x \in X \implies x \in T_* \\ &\iff x \in X \implies \Gamma(x) \subseteq T \\ &\iff x \in X \wedge t \in \Gamma(x) \implies t \in T \\ &\iff \forall t \in S : (\exists x \in X : t \in \Gamma(x) \implies t \in T) \\ &\iff t \in \Gamma([X]) \implies t \in T \\ &\iff \Gamma([X]) \subseteq T. \end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$(a) \quad \underline{P}(T) = P(T_*)$$

(b) $\bar{P}(T) = P(T^*)$.

Beweis:

(a) Sei $f \in F_\Gamma$ beliebig. Dann gilt $T_* \subseteq f^{-1}[T]$, denn für beliebiges $x \in T_*$ gilt

$$f(x) \in \Gamma(x) \subseteq T.$$

Also folgt $P(T_*) \leq P(f^{-1}[T])$ und somit auch $P(T_*) \leq \underline{P}(T)$. Betrachte nun eine spezielle Funktion g , die jedem $x \in T_*$ ein $y \in \Gamma(x)$ und jedem $x \in T_*^c$ ein y aus $\Gamma(x)$ mit $y \notin T$ zuordnet und ansonsten beliebig ist (dies ist immer möglich). Nach Konstruktion ist g mit Γ verträglich und es gilt $g^{-1}(T) \subseteq T_*$, denn für ein $x \notin T_*$ folgt $g(x) \notin T$ und somit $x \notin g^{-1}(T)$. Daraus folgt nun schließlich auch $\underline{P}(T) \leq P(T_*)$ und insgesamt $\underline{P}(T) = P(T_*)$.

(b) Zunächst gilt die Dualitätsbedingung $\bar{P}(T) = 1 - \underline{P}(T^c)$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \sup\{P(f^{-1}[T]) \mid f \in F_\Gamma\} &= \sup\{1 - P((f^{-1}[T])^c) \mid f \in F_\Gamma\} \\ &= 1 - \inf\{P(f^{-1}[T^c]) \mid f \in F_\Gamma\} \\ &= 1 - \underline{P}(T^c). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} P(T^*) &= 1 - P(T^{*c}) \\ &= 1 - P(\{\omega \in \Omega \mid \Gamma(\omega) \cap T = \emptyset\}) \\ &= 1 - P(\{\omega \in \Omega \mid \Gamma(\omega) \subseteq T^c\}) \\ &= 1 - P((T^c)_*). \end{aligned}$$

Also folgt: $\bar{P}(T) = 1 - \underline{P}(T^c) = 1 - P((T^c)_*) = P(T^*)$.

■

Lemma 3.5.2. Die durch eine mengenwertige Abbildung erhaltene untere Prävision

$$\underline{P} : 2^S \longrightarrow \mathbb{R} : T \mapsto P(T_*)$$

ist monoton und vollständig monoton.

Beweis: Da das Paar $(\Gamma, *)$ eine Adjunktion bezüglich $((2^\Omega, \subseteq), (2^S, \subseteq))$ bildet ist $*$ nach Lemma 3.4.17 infimumtreu. Da P als lineare Prävision insbesondere monoton und vollständig monoton ist folgt mit Lemma 3.4.5 die Monotonie und die vollständige Monotonie der Komposition $P \circ_*$.

■

Bemerkung 3.5.3. Hätten wir statt einem Wahrscheinlichkeitsmaß P nur eine monotone und vollständig monotone Abbildung $\underline{P} : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ verwendet, so wäre auch in diesem Fall die Komposition $\underline{P} \circ_*$ monoton und vollständig monoton, d.h. die monotonen und vollständig monotonen Abbildungen sind abgeschlossen bezüglich Vorschaltung einer infimumtreuen Abbildung.

Falls alle $\Gamma(\omega)$ paarweise verschieden sind kann man die den $\omega \in \Omega$ zugeordneten Wahrscheinlichkeiten $P(\{\omega\})$ mit den $\Gamma(\omega)$ assoziieren und erhält ein sogenanntes „basic probability assignment“ (siehe [30]):

$$m : 2^S \supseteq \{\Gamma(\omega) | \omega \in \Omega\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \Gamma(\omega) \mapsto m(\omega) := P(\{\omega\})$$

Diese Abbildung ist auf 2^S erweiterbar durch

$$m : 2^S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : B \mapsto P(\{\omega \in \Omega | \Gamma(\omega) = B\})$$

Mengen, die keinem $\Gamma(\omega)$ entsprechen haben damit

„Masse“ 0 und m ist auch für nicht paarweise verschiedene

$\Gamma(\omega)$ wohldefiniert. Wir nehmen im Folgenden an, dass auch S endlich ist.

Bemerkung 3.5.4. Es gilt:

$$\begin{aligned} \forall T \subseteq S & : m(T) \geq 0 \\ m(\emptyset) & = P(\emptyset) = 0 \\ \sum_{T \subseteq S} m(T) & = P(\Omega) = 1. \end{aligned}$$

Die Idee dahinter ist, dass man oft Evidenz der Art $s \in T \subseteq S$ hat und deshalb der Teilmenge T direkt ein „weight of evidence“ zuordnen möchte. Aus m ist dann die untere Prävision $\underline{P} : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ableitbar durch:

$$\underline{P}(B) = \sum_{\omega: \Gamma(\omega) \subseteq B} P(\{\omega\}) = \sum_{C \subseteq B} m(C).$$

Es stellt sich nun die Frage, wie man aus der unteren Prävision \underline{P} die Massenfunktion m zurückgewinnt. Um dies zu untersuchen wählen wir gleich einen allgemeineren Kontext.

3.5.2. Spiele über geordneten Mengen

Sei (Q, \leq_Q) eine geordnete, lokal endliche Menge, die einen Verband bildet und ein kleinstes Element \perp_Q besitzt. Dann bezeichne \mathbb{R}^Q die Menge aller Abbildungen von Q nach \mathbb{R} .

Definition 3.5.5. Eine Abbildung $m \in \mathcal{L}(Q)$ heißt:

$$\begin{aligned} \text{schwach positiv:} & \iff \forall q \in Q : m(q) \geq 0 \\ \text{konfliktfrei bzw. 0-normiert:} & \iff m(\perp_Q) = 0 \\ \text{normiert bzw. 1-normiert:} & \iff \sum_{q \in Q} m(q) \text{ ist wohldefiniert mit } \sum_{q \in Q} m(q) = 1. \end{aligned}$$

Falls m schwach positiv, konfliktfrei und normiert ist heißt m **Dichte, basic probability assignment** oder auch **Massenfunktion**. Falls m schwach positiv und konfliktfrei ist heißt m **nichtnormierte Massenfunktion** bzw. **nichtnormierte Dichte**. Elemente $q \in Q$ heißen **fokal (bezüglich m)**, falls $m(q) \neq 0$ gilt.

Bezeichne \mathcal{A} die Menge aller Abbildungen von \leq_Q nach \mathbb{R} . Wir definieren eine Addition und eine Multiplikation (Faltung) auf \mathcal{A} durch:

$$+ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta : (X, Y) \mapsto (\alpha + \beta)((X, Y)) := \alpha((X, Y)) + \beta((X, Y))$$

$$* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta : (X, Y) \mapsto (\alpha * \beta)((X, Y)) := \sum_{X \leq_Q Z \leq_Q Y} \alpha((X, Z))\beta((Z, Y)).$$

\mathcal{A} mit diesen Operationen heißt **Inzidenzalgebra** bezüglich (Q, \leq_Q) über dem Körper \mathbb{R} und wurde durch Rota in [28] eingeführt. Analog zu [34] studieren wir nun einige Eigenschaften von \mathcal{A} .

Lemma 3.5.6. $(\mathcal{A}, +, *, 0_{\mathcal{A}}, \delta)$ ist ein Ring mit Eins. Das neutrale Element der Addition ist gegeben durch:

$$0_{\mathcal{A}} : \leq_Q \longrightarrow \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto 0.$$

Das neutrale Element der Faltung ergibt sich als:

$$\delta : \leq_Q \longrightarrow \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto \delta((X, Y)) := \begin{cases} 1 & \text{falls } X = Y \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Es ist für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ zu zeigen:

- (a) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- (b) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- (c) $\alpha + 0_{\mathcal{A}} = \alpha$
- (d) es existiert ein Element $(-\alpha) \in \mathcal{A}$ mit $\alpha + (-\alpha) = 0_{\mathcal{A}}$
- (e) $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$
- (f) $\alpha * (\beta + \gamma) = (\alpha * \beta) + (\alpha * \gamma)$
- (g) $(\alpha + \beta) * \gamma = (\alpha * \gamma) + (\beta * \gamma)$
- (h) $\alpha * \delta = \delta * \alpha = \alpha$.

Seien dazu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ und $(X, Y) \in \leq_Q$ beliebig. Dann gilt:

(a)

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)((X, Y)) &= \alpha((X, Y)) + \beta((X, Y)) \\ &= \beta((X, Y)) + \alpha((X, Y)) \\ &= (\beta + \alpha)((X, Y))\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}((\alpha + \beta) + \gamma)((X, Y)) &= (\alpha + \beta)((X, Y)) + \gamma((X, Y)) \\ &= \alpha((X, Y)) + \beta((X, Y)) + \gamma((X, Y)) \\ &= \alpha((X, Y)) + (\beta + \gamma)((X, Y)) \\ &= (\alpha + (\beta + \gamma))((X, Y))\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}(\alpha + 0_{\mathcal{A}})((X, Y)) &= \alpha((X, Y)) + 0_{\mathcal{A}}((X, Y)) \\ &= \alpha((X, Y)) + 0 \\ &= \alpha((X, Y))\end{aligned}$$

(d) Definiere $(-a)$ durch

$$(-\alpha) : \leq_Q \longrightarrow \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto -\alpha((X, Y)).$$

Dann gilt

$$(\alpha + (-\alpha))((X, Y)) = \alpha((X, Y)) - \alpha((X, Y)) = 0.$$

(e)

$$\begin{aligned}[(\alpha * \beta) * \gamma]((X, Y)) &= \sum_{X \leq_Q Z \leq_Q Y} (\alpha * \beta)((X, Z))\gamma((Z, Y)) \\ &= \sum_{X \leq_Q Z \leq_Q Y} \sum_{X \leq_Q V \leq_Q Z} [\alpha((X, V))\beta((V, Z))]\gamma((Z, Y)) \\ &= \sum_{X \leq_Q Z \leq_Q Y} \sum_{X \leq_Q V \leq_Q Z} \alpha((X, V))[\beta((V, Z))\gamma((Z, Y))] \\ &= \sum_{X \leq_Q V \leq_Q Y} \sum_{V \leq_Q Z \leq_Q Y} \alpha((X, V))[\beta((V, Z))\gamma((Z, Y))] \\ &= \sum_{X \leq_Q V \leq_Q Y} \alpha((X, V)) \sum_{V \leq_Q Z \leq_Q Y} \beta((V, Z))\gamma((Z, Y)) \\ &= \sum_{X \leq_Q V \leq_Q Y} \alpha((X, V))(\beta * \gamma)((V, Y)) \\ &= [\alpha * (\beta * \gamma)]((X, Y))\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} [\alpha * (\beta + \gamma)]((X, Y)) &= \sum_{X \leq_Q Z \leq_Q Y} \alpha((X, Z))[\beta((Z, Y)) + \gamma((Z, Y))] \\ &= \sum_{X \leq_Q Z \leq_Q Y} \alpha((X, Z))\beta((Z, Y)) + \sum_{X \leq_Q Z \leq_Q Y} \alpha((X, Z))\gamma((Z, Y)) \\ &= (\alpha * \beta)((X, Y)) + (\alpha * \gamma)((X, Y)) \\ &= [(\alpha * \beta) + (\alpha * \gamma)]((X, Y)) \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} [(\alpha + \beta) * \gamma]((X, Y)) &= \sum_{X \leq_Q Z \leq_Q Y} [\alpha + \beta]((X, Z))\gamma((Z, Y)) \\ &= \sum_{X \leq_Q Z \leq_Q Y} \alpha((X, Z))\gamma((Z, Y)) + \sum_{X \leq_Q Z \leq_Q Y} \beta((X, Z))\gamma((Z, Y)) \\ &= (\alpha * \gamma)((X, Y)) + (\beta * \gamma)((X, Y)) \\ &= [(\alpha * \gamma) + (\beta * \gamma)]((X, Y)) \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned} [\alpha * \delta]((X, Y)) &= \sum_{X \leq_Q Z \leq_Q Y} \alpha((X, Z))\delta((Z, Y)) \\ &= 0 + \dots + \alpha((X, Y)) \cdot 1 \\ &= \alpha((X, Y)) \\ &= \sum_{X \leq_Q Z \leq_Q Y} \delta((X, Z))\alpha((Z, Y)) \\ &= [\delta * \alpha]((X, Y)). \end{aligned}$$

■

Lemma 3.5.7. Ein Element $\alpha \in \mathcal{A}$ ist genau dann eine **Einheit** (d.h. α ist in \mathcal{A} invertierbar), wenn $\alpha((X, X))$ für alle $X \in Q$ nicht 0 ist. Das inverse Element α^{-1} ist rekursiv durch

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}((X, X)) &= \frac{1}{\alpha((X, X))} && \text{für } X \in Q \\ \alpha^{-1}((X, Y)) &= \frac{-1}{\alpha((X, X))} \sum_{X <_Q Z \leq_Q Y} \alpha((X, Z))\alpha^{-1}((Z, Y)) && \text{für } X <_Q Y \end{aligned}$$

gegeben (Die Rekursion läuft hier über die Anzahl der Elemente in $[X, Y]$).

Beweis: Sei β das inverse Element zu α . Dann muß für beliebiges $X \in Q$ gelten:

$$[\alpha * \beta]((X, X)) = \alpha((X, X))\beta((X, X)) = \delta((X, X)) = 1.$$

Also folgt $\alpha((X, X)) \neq 0$. Sei nun umgekehrt $\alpha((X, X)) \neq 0$ für alle $X \in Q$. Wir suchen nun ein rechtsinverses Element β mit $\alpha * \beta = \delta$, also mit $[\alpha * \beta]((X, X)) = 1$ für beliebige $X \in Q$ und

$$[\alpha * \beta]((X, Y)) = 0$$

für $X <_Q Y$. Sei nun β definiert wie oben. Für $X \in Q$ gilt offensichtlich:

$$[\alpha * \beta]((X, X)) = \alpha((X, X)) \frac{1}{\alpha((X, X))} = 1.$$

Für $X < Y$ ist noch

$$\begin{aligned} 0 &= [\alpha * \beta]((X, Y)) \\ &= \sum_{X <_Q Z \leq_Q Y} \alpha((X, Z))\beta((Z, Y)) \\ &= \alpha((X, X))\beta((X, Y)) + \sum_{X <_Q Z \leq_Q Y} \alpha((X, Z))\beta((Z, Y)) \end{aligned}$$

bzw.

$$\beta((X, Y)) = \frac{-1}{\alpha((X, X))} \sum_{X <_Q Z \leq_Q Y} \alpha((X, Z))\beta((Z, Y))$$

zu zeigen, was aber direkt aus der rekursiven Definition von β folgt.

In ähnlicher Weise existiert ein linksinverses $\gamma \in Q$ definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma((X, X)) &= \frac{1}{\alpha((X, X))} && \text{für } X \in Q \\ \gamma((X, Y)) &= \frac{-1}{\alpha((Y, Y))} \sum_{X \leq_Q Z <_Q Y} \gamma((X, Z))\alpha((Z, Y)) && \text{für } X <_Q Y \end{aligned}$$

mit $\gamma * \alpha = \delta$ und es folgt:

$$\gamma = \gamma * \delta = \gamma * (\alpha * \beta) = (\gamma * \alpha) * \beta = \delta * \beta = \beta.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

Bemerkung 3.5.8. Aus dem obenstehenden Beweis folgt insbesondere die Gleichung

$$\frac{-1}{\alpha((X, X))} \sum_{X <_Q Z \leq_Q Y} \alpha((X, Z))\alpha^{-1}((Z, Y)) = \frac{-1}{\alpha((Y, Y))} \sum_{X \leq_Q Z <_Q Y} \alpha^{-1}((X, Z))\alpha((Z, Y)).$$

3.5.3. Möbiusinversion über geordneten Mengen

Zwei Einheiten sind nun besonders wichtig. Die **Zeta-Funktion**

$$\zeta((X, Y)) = 1 \quad \text{für } (X, Y) \in \leq_Q$$

und die **Möbiusfunktion**

$$\mu((X, Y)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } X = Y \\ - \sum_{X <_Q Z \leq_Q Y} \mu((Z, Y)) & \text{falls } X <_Q Y. \end{cases}$$

Die Möbiusfunktion und die Zeta-Funktion sind zueinander invers. Dies folgt direkt aus Lemma 3.5.7 durch Wahl von $\alpha = \zeta$. Für $Q = 2^\Omega$ mit endlichem Ω läßt sich μ explizit angeben:

$$\mu((A, B)) = (-1)^{|A \setminus B|},$$

denn für beliebiges $(A, B) \in \leq_Q$ folgt mit dem binomischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned} [\mu * \zeta]((A, B)) &= \sum_{A \subseteq C \subseteq B} (-1)^{|C \setminus A|} \cdot 1 \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } A = B \\ \binom{|B \setminus A|}{0} - \binom{|B \setminus A|}{1} + \dots \pm \binom{|B \setminus A|}{|B \setminus A|} = 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \delta((A, B)) \end{aligned}$$

und analog gilt:

$$\begin{aligned} [\zeta * \mu]((A, B)) &= \sum_{A \subseteq C \subseteq B} 1 \cdot (-1)^{|B \setminus C|} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } A = B \\ \pm \binom{|B \setminus A|}{0} \mp \binom{|B \setminus A|}{1} \pm \dots \pm \binom{|B \setminus A|}{|B \setminus A|} = 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \delta((A, B)). \end{aligned}$$

Definition 3.5.9. Für $f \in \mathcal{L}(Q)$ und $\alpha \in \mathcal{A}$ definieren wir eine Rechtsmultiplikation:

$$* : \mathcal{L}(Q) \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(Q) : (f, \alpha) \mapsto (f * \alpha) : Q \longrightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \sum_{Z \leq_Q X} f(Z) \alpha((Z, X))$$

Lemma 3.5.10. $\mathcal{L}(Q)$ ist ein Rechtsmodul über dem Ring \mathcal{A} , d.h. für alle $f, g \in \mathcal{L}(Q)$ und $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ gilt:

(a) $f * \delta = f$

$$(b) (f * \alpha) * \beta = f * (\alpha * \beta)$$

$$(c) (f + g) * \alpha = (f * \alpha) + (g * \alpha)$$

$$(d) f * (\alpha + \beta) = (f * \alpha) + (f * \beta).$$

Beweis: Sei $X \in Q$ beliebig. Dann gilt:

$$(a) [f * \delta](X) = \sum_{Z \leq_Q X} f(Z) \delta((Z, X)) = f(X)$$

(b)

$$\begin{aligned} [(f * \alpha) * \beta](X) &= \sum_{Z \leq_Q X} [f * \alpha](Z) \beta((Z, X)) \\ &= \sum_{Z \leq_Q X} \sum_{V \leq_Q Z} f(V) \alpha((V, Z)) \beta((Z, X)) \\ &= \sum_{V \leq_Q X} \sum_{V \leq_Q Z \leq_Q X} f(V) \alpha((V, Z)) \beta((Z, X)) \\ &= \sum_{V \leq_Q X} f(V) \sum_{V \leq_Q Z \leq_Q X} \alpha((V, Z)) \beta((Z, X)) \\ &= \sum_{V \leq_Q X} f(V) [\alpha * \beta]((V, X)) \\ &= [f * (\alpha * \beta)](X) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} [(f + g) * \alpha](X) &= \sum_{Z \leq_Q X} [f + g](Z) \alpha((Z, X)) \\ &= \sum_{Z \leq_Q X} [f(Z) \alpha((Z, X)) + g(Z) \alpha((Z, X))] \\ &= \sum_{Z \leq_Q X} f(Z) \alpha((Z, X)) + \sum_{Z \leq_Q X} g(Z) \alpha((Z, X)) \\ &= [f * \alpha](X) + [g * \alpha](X) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}[f * (\alpha + \beta)](X) &= \sum_{Z \leq_Q X} f(Z)[\alpha + \beta](Z, X) \\ &= \sum_{Z \leq_Q X} [f(Z)\alpha(Z, X) + f(Z)\beta(Z, X)] \\ &= \sum_{Z \leq_Q X} f(Z)\alpha(Z, X) + \sum_{Z \leq_Q X} f(Z)\beta(Z, X) \\ &= [f * \alpha](X) + [f * \beta](X).\end{aligned}$$

■

Definition 3.5.11. Für $f \in \mathcal{L}(Q)$ heißt $f * \mu$ **Möbiusinverse** von f .

Bemerkung 3.5.12. Falls $\alpha \in \mathcal{A}$ eine Einheit ist, so beschreibt die Abbildung

$$\rho_\alpha : \mathcal{L}(Q) \longrightarrow \mathcal{L}(Q) : f \mapsto f * \alpha$$

eine 1 – 1 Korrespondenz zwischen $\mathcal{L}(Q)$ und $\mathcal{L}(Q)$. Die inverse Abbildung zu ρ_α ist offensichtlich $\rho_{\alpha^{-1}}$, denn für beliebiges $f \in \mathcal{L}(Q)$ gilt: $\rho_{\alpha^{-1}}(\rho_\alpha(f)) = (f * \alpha) * \alpha^{-1} = f * (\alpha * \alpha^{-1}) = f * \delta = f = f * (\alpha^{-1} * \alpha) = (f * \alpha^{-1}) * \alpha = \rho_\alpha(\rho_{\alpha^{-1}}(f))$. Die Rechtsmultiplikationsabbildungen ρ_ζ und ρ_μ sind von besonderem Interesse: Falls eine Massenfunktion $m \in \mathcal{L}(Q)$ (z.B. durch eine mengenwertige Abbildung $\Gamma : \Omega \longrightarrow 2^S$ und einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P)) gegeben ist, so ergibt sich die ihr zugeordnete untere Prävision \underline{P} als $\underline{P} = m * \zeta$. Falls \underline{P} bekannt ist ergibt sich m aus \underline{P} durch $m = \underline{P} * \mu$. Wenn aber zunächst nur eine beliebige untere Prävision \underline{P} auf $Q = 2^\Omega$ (mit endlichem Ω) gegeben ist kann man in naheliegender Weise ein $m := \underline{P} * \mu : Q \longrightarrow \mathbb{R} : q \mapsto [\underline{P} * \mu](q)$ und eine mengenwertige Abbildung $\Gamma : Q \longrightarrow 2^\Omega : q \mapsto q$ definieren und fragen, ob \underline{P} bzw. m von einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaß $P : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ induziert wird. Dazu müßte für beliebiges $B \subseteq \Omega$ gelten:

$$m(B) = P(\{q \in Q | \Gamma(q) = B\}) = P(\{q \in Q | q = B\}) = P(B),$$

d.h. die Prävision \underline{P} wird genau dann von der Mengenwertigen Abbildung Γ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß P erzeugt, wenn m eine Dichte ist. Das erzeugende Wahrscheinlichkeitsmaß P ist in diesem Fall genau gleich dem basic probability assignment m und \underline{P} ergibt sich zu

$$\underline{P}(B) = [m * \zeta](B) = \sum_{C \subseteq B} m(C) = \sum_{C \subseteq B} P(C).$$

Im Folgenden wollen wir untersuchen, wann eine zu einer unteren Prävision \underline{P} gehörige Möbiusinverse $m = \underline{P} * \mu$ eine Dichte ist.

Definition 3.5.13. Eine untere Wahrscheinlichkeit $\underline{P} : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Belief-Funktion**, falls ihre Möbiusinverse $m = \underline{P} * \mu$ eine Dichte ist. Eine obere Wahrscheinlichkeit \bar{P} heißt **Plausibility-Funktion**, falls ihre duale untere Wahrscheinlichkeit $\underline{P} = \bar{P}^\partial$ eine Belief-Funktion ist. Eine untere Prävision $\underline{P} : \mathcal{L}(\Omega) \supseteq \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **verallgemeinerte Belief-Funktion**, falls sie eine nicht-negative Möbiusinverse besitzt und wenn für alle λ mit $\lambda\Omega \in \mathcal{K}$ gilt: $\underline{P}(\lambda\Omega) = \lambda$. Analog heißt eine obere Prävision \bar{P} **verallgemeinerte Plausibility-Funktion**, falls ihre duale Prävision \underline{P} eine verallgemeinerte Belief-Funktion ist.

Lemma 3.5.14. Sei $f \in \mathcal{L}(Q)$ und $S \subseteq Q$.

Dann gilt die **Faltungserlegungsgleichung**:

$$\sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} (-1)^{|T|+1} [f * \zeta](\bigwedge_{q \in T} q) = \sum_{q \in \downarrow S} f(q)$$

Beweis: Zunächst gilt:

$$\sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} (-1)^{|T|+1} [f * \zeta](\bigwedge_{q \in T} q) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} (-1)^{|T|+1} \sum_{p \leq_Q (\bigwedge_{q \in T} q)} f(p).$$

Die rechte Seite der Gleichung ist eine Linearkombination der $f(p)$. Für $p \in \downarrow S$ bestimmen wir nun den zugehörigen Koeffizienten (zur rechten Seite tragen nur $f(p)$ mit $p \in \downarrow S$ bei). Sei dazu $T_p := \{q \in S \mid p \leq_Q q\}$. Dann folgt:

$$\sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} (-1)^{|T|+1} \sum_{p \leq_Q (\bigwedge_{q \in T} q)} f(p) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq T_p} (-1)^{|T|+1} f(p),$$

denn es gilt nach Definition des Infimums die Äquivalenz:

$$\begin{aligned} p \leq_Q \bigwedge_{q \in T} q &\iff \forall q \in T : p \leq_Q q \\ &\iff [q \in T \implies p \leq_Q q] \\ &\iff T \subseteq T_p. \end{aligned}$$

Nun gilt aber weiter für festes p :

$$\begin{aligned} \sum_{\emptyset \neq T \subseteq T_p} (-1)^{|T|+1} f(p) &= \left[\binom{|T_p|}{1} - \binom{|T_p|}{2} + \binom{|T_p|}{3} - \dots \pm \binom{|T_p|}{|T_p|} \right] \cdot f(p) \\ &= \left[0 + \binom{|T_p|}{0} \right] \cdot f(p) \\ &= 1 \cdot f(p), \end{aligned}$$

dass heißt, alle Koeffizienten sind 1 und die Behauptung ist gezeigt. ■

Satz 3.5.15. *Eine untere Prävision \underline{P} hat genau dann eine schwach positive konfliktfreie Möbiusinverse m , wenn \underline{P} konfliktfrei, monoton und vollständig monoton ist.*

Beweis:

„ \Leftarrow “ : Sei $q \in Q$ beliebig. Betrachte die Menge M_q aller unterer Nachbarn von q . Für $q = \perp_Q$ gilt $m(q) = \underline{P}(q) = 0 \geq 0$, dass heißt m ist konfliktfrei und auf $q = \perp_Q$ schwach positiv. Für einelementiges $M_q = \{p\}$ gilt: $[v \leq_Q p \text{ oder } v = q \iff v \leq_Q q]$ und $\underline{P}(q)$ vereinfacht sich zu $\underline{P}(q) = m(q) + \sum_{v <_Q q} m(v) = m(q) + \underline{P}(p)$ und aus der Monotonie von \underline{P} folgt mit $p \leq_Q q$ die Nichtnegativität von $m(q)$. Sei jetzt M_q mindestens 2-elementig. Dann gilt $S := \bigvee_{v \in M_q} v = q$, denn alle $v \in M_q$ sind kleinergleich q also auch deren Supremum S . Wäre S echt kleiner als q , dann wäre S ein unterer Nachbar von q , denn zwischen S und q muß ein unterer Nachbar von q liegen und dieser kann nicht echt größer als S sein. Das heißt aber, dass alle $v \in M_q$ bereits mit S identisch sind, denn alle $v \in M_q$ sind kleiner als S . Dies wäre im Widerspruch mit der Kardinalitätsforderung an M_q . Es folgt nun mit der Faltungszzerlegungsgleichung und der vollständigen Monotonie von \underline{P} :

$$\begin{aligned} m(q) &= \underline{P}(q) - \sum_{p \in \downarrow M_q} m(p) \\ &= \underline{P}(q) - \sum_{\emptyset \neq T \subseteq M_q} (-1)^{|T|+1} \underline{P}\left(\bigwedge_{p \in T} p\right) \\ &\geq \underline{P}(q) - \underline{P}(q) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und damit ist die Behauptung gezeigt.

„ \Rightarrow “ : \underline{P} ist konfliktfrei: $\underline{P}(\perp_Q) = m(\perp_Q) = 0$. Seien nun $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $S = \{p_1, \dots, p_k\} \subseteq Q$. Es gilt zunächst die Implikation

$$q \in \downarrow S \implies \exists s \in S : q \leq_Q s \implies q \leq_Q \left(\bigvee_{s \in S} s \right).$$

Mit der Faltungszzerlegungsgleichung ergibt sich:

$$\sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} (-1)^{|T|+1} \underline{P}(\bigwedge_{q \in T} q) = \sum_{q \in \downarrow S} m(q) \leq \sum_{q \leq_Q \bigvee_{s \in S} s} m(q) = \underline{P}(\bigvee_{s \in S} s)$$

und folglich ist \underline{P} vollständig monoton. Da alle $m(v)$ nichtnegativ sind gilt für $p \leq_Q q$:

$$\underline{P}(p) = \sum_{v \leq_Q p} m(v) \leq \sum_{v \leq_Q q} m(v) = \underline{P}(q),$$

und somit ist \underline{P} auch monoton. ■

Bemerkung 3.5.16. Eine Variante von Satz 3.5.15 wurde für $Q = 2^\Omega$ mit endlichem Ω bereits in [30] gezeigt. Für geordnete Mengen bzw. Verbände wird die Rückrichtung des Satzes aber in [13] noch als offene Frage betrachtet. Die Beweisidee des hier geführten Beweises stammt aus [34], in dem jedoch nur $Q = 2^\Omega$ mit Ω endlich betrachtet wird, die Verallgemeinerung auf lokal endliche geordnete Mengen ist aber „straight forward“.

3.6. Darstellung kohärenter Prävisionen

Definition 3.6.1. Für eine untere Prävision \underline{P} bezeichne $\mathcal{M}(\underline{P})$ die Menge aller linearen Prävisionen über $\mathcal{L}(\Omega)$, die \underline{P} auf $\text{dom}(\underline{P})$ dominieren. Eine lineare Prävision p heißt **zulässig** (bezüglich \underline{P}), falls $p \in \mathcal{M}(\underline{P})$ gilt. Die Menge $\mathcal{M}(\underline{P})$ wird auch als der **Kern** der Prävision \underline{P} bezeichnet. Gilt

$$\forall X \in \text{dom}(\underline{P}) : Q(X) \geq \underline{P}(X)$$

für eine **kohärente** Prävision Q über $\mathcal{L}(\Omega)$ und eine beliebige Prävision \underline{P} , so folgt bereits

$$\forall X \in \mathcal{L}(\Omega) : Q(X) \geq \underline{P}^\circ(X) :$$

Für $X \in \mathcal{L}(\Omega)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\chi_1, \dots, \chi_n \in \text{dom}(\underline{P})$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X$ gilt wegen der Kohärenz von Q (siehe dazu auch Lemma 3.2.15):

$$Q(X) \geq Q\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0\right) \geq \sum_{i=1}^n Q(\lambda_i \chi_i) + Q(\lambda_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q(\chi_i) + \lambda_0 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(\chi_i) + \lambda_0$$

und es folgt insgesamt $Q(X) \geq \underline{P}^\circ(X)$. Insbesondere gilt also auch

$$\mathcal{M}(\underline{P}) = \mathcal{M}(\underline{P}^\circ).$$

Eine untere Prävision \underline{P} heißt **untere Einhüllende (lower envelope)**, falls es eine Klasse $\{P_\theta | \theta \in \Theta\}$ von linearen Prävisionen (über $\text{dom}(\underline{P})$) gibt, für die gilt:

$$\forall X \in \text{dom}(\underline{P}) : \underline{P}(X) = \inf\{P_\theta(X) | \theta \in \Theta\}.$$

\underline{P} wird dann auch als untere Einhüllende von $\{P_\theta | \theta \in \Theta\}$ bezeichnet.

Satz 3.6.2. (Lower envelope theorem, [37], S.134)

Sei \underline{P} eine untere Prävision über $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$. Dann gilt:

1. \underline{P} vermeidet sicheren Verlust genau dann, wenn $\mathcal{M}(\underline{P}) \neq \emptyset$, d.h. genau dann, wenn \underline{P} durch eine lineare Prävision dominiert wird.
2. \underline{P} ist kohärent genau dann, wenn \underline{P} untere Einhüllende von $\mathcal{M}(\underline{P})$ ist.

Um diesen Satz zu beweisen benötigen wir zunächst noch ein Lemma:

Lemma 3.6.3. (Separation lemma, [37], S.133)

Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ beliebig aber nichtleer. Dann sind äquivalent:

- (a) $\sup \sum_{j=1}^n X_j \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$ und $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{D}$
- (b) Es existiert eine lineare Prävision P über \mathcal{L} mit: $\forall X \in \mathcal{D} : P(X) \geq 0$
- (c) Es existiert eine lineare Prävision P über \mathcal{D} mit: $\forall X \in \mathcal{D} : P(X) \geq 0$.

Beweis: (Separation lemma)

Gelte (a). Sei weitehin

$$\mathcal{V} := \{Y \in \mathcal{L}(\Omega) : \exists(n \in \mathbb{N}^+, X_1, \dots, X_n \in \mathcal{D}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0) : Y \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j\}.$$

Dann ist \mathcal{V} konvex (d.h., es gilt $Z_1, Z_2 \in \mathcal{V}, \lambda \in [0, 1] \implies \lambda Z_1 + (1 - \lambda)Z_2 \in \mathcal{V}$):

Für $Z_1, Z_2 \in \mathcal{V}$ und $\theta \in [0, 1]$ existieren

$n \in \mathbb{N}^+, X_1, \dots, X_n \in \mathcal{D}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}^+, Y_1, \dots, Y_m \in \mathcal{D}, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$ mit

$$Z_1 \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j$$

und

$$Z_2 \geq \sum_{j=1}^m \mu_j Y_j.$$

Also folgt

$$\theta Z_1 + (1 - \theta)Z_2 \geq \theta \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j + (1 - \theta) \sum_{j=1}^m \mu_j Y_j = \sum_{j=1}^n \theta \lambda_j X_j + \sum_{j=1}^m (1 - \theta) \mu_j Y_j$$

und damit ist $(\theta Z_1 + (1 - \theta)Z_2)$ ebenfalls aus \mathcal{V} . Der Vektorraum $\mathcal{L}(\Omega)$, versehen mit der Supremumnorm $\|X\|_\infty := \sup |X|$ bildet einen linearen topologischen Raum. Weiterhin hat \mathcal{V} ein nichtleeres topologisches Inneres $\text{int}(\mathcal{V})$ (z.B. ist $\mathbb{1}_\Omega$ aus $\text{int}(\mathcal{V})$, denn für beliebiges $X \in \mathcal{D}$ gilt: $\mathbb{1}_\Omega \geq 0 \cdot X$ also $\mathbb{1}_\Omega \in \mathcal{V}$ und für $\varepsilon := \frac{1}{2}$ folgt $\|Y - \mathbb{1}\| < \varepsilon \implies Y \geq 0 \cdot X \implies Y \in \mathcal{V}$). Für beliebiges $Y \in \mathcal{V}$ gilt nach Voraussetzung $\sup Y \geq \sup \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j$ für geeignete λ_j und X_j . Daraus folgt nun analog zum Beweis von Lemma 3.2.2 (a) (ersetze $G(X_j)$ durch X_j):

$$\sup Y \geq \sup \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \geq 0.$$

Speziell existiert für ein $Y \in \text{int}(\mathcal{V})$ ein $\delta > 0$ mit $Y - \delta \in \mathcal{V}$ und es folgt $\sup Y \geq \delta > 0$. Das bedeutet nun, dass das Nullspiel 0_Ω nicht im Inneren $\text{int}(\mathcal{V})$ liegt. Nach dem Trennungslemma B.0.6 existiert nun ein lineares Funktional $P \neq 0$ über $\mathcal{L}(\Omega)$ mit $P(Y) > 0$ für alle $Y \in \text{int}(\mathcal{V})$ bzw $P(Y) \geq 0$ für alle $Y \in \mathcal{V}$. Aus $Y \geq 0$ folgt $Y \in \mathcal{V}$ und somit $P(Y) \geq 0$, d.h. P ist positiv.

Da P nichtnull ist gilt $P(\mathbb{1}_\Omega) \neq 0$ und wir können P renormieren und erhalten $P(\mathbb{1}_\Omega) = 1$. Das bedeutet aber insgesamt, dass P eine lineare Prävision über $\mathcal{L}(\Omega)$ ist und (b) folgt aus der Tatsache, dass \mathcal{D} eine Teilmenge von \mathcal{V} ist.

Das (c) aus (b) folgt ist klar. Gelte nun (c). Wenn (a) nicht gelten würde, so würde

$$A := \sum_{j=1}^n X_j < 0$$

gelten und es würde

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(X_j) < P(0) = 0$$

folgen, was im Widerspruch zur Nichtnegativität der Summanden stünde. ■

Nun zum Beweis des Lower envelope Theorems:

Beweis: (Lower envelope theorem)

Für (a) wende Lemma 3.6.3 auf $\mathcal{D} = \{G(X) | X \in \mathcal{X}\}$ an: Nach Definition 3.2.1 vermeidet \underline{P} sicheren Verlust genau dann, wenn (a) gilt, also genau dann, wenn ein $P \in \mathcal{P}(\Omega)$ existiert mit $P(G(X)) \geq 0$ bzw. $P(X - \underline{P}(X)) = P(X) - \underline{P}(X) \geq 0$ bzw. $P(X) \geq \underline{P}(X)$ für alle $X \in \mathcal{X}$. Das heißt also, dass \underline{P} genau dann sicheren Verlust vermeidet, wenn $\mathcal{M}(\underline{P})$ nichtleer ist.

Um (b) einzusehen wende wieder Lemma 3.6.3 auf $\mathcal{D}(X_0) = \{G(X) | X \in \mathcal{X}\} \cup \{-G(X_0)\}$ mit X_0 aus Definition 3.2.3 an. Für festes X_0 gilt die Kohärenzbedingung genau dann, wenn (a) für $\mathcal{D}(X_0)$ gilt. Dies ist wiederum äquivalent zur Existenz eines $P \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $P(G(X)) \geq 0$ für alle $X \in \mathcal{X}$ und $P(G(X_0)) \leq 0$, d.h., mit $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ und $P(X_0) = \underline{P}(X_0)$. Deshalb ist \underline{P} kohärent genau dann, wenn für jedes X_0 aus \mathcal{X} ein P aus $\mathcal{M}(\underline{P})$ existiert mit $P(X_0) = \underline{P}(X_0)$ bzw. $\underline{P}(X_0) = \min\{P(X_0) | P \in \mathcal{M}(\underline{P})\}$. ■

3.7. Beispiele kohärenter Prävisionen

In diesem Abschnitt sollen beispielhaft einige kohärente Prävisionen illustriert werden.

Beispiel 1. Betrachte das zweimalige unabhängige Werfen einer eventuell unfairen Münze. Der Ereignisraum Ω ist gegeben durch $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ mit

$$\begin{aligned}\omega_1 &\hat{=} \text{erster Wurf Kopf, zweiter Wurf Kopf} \\ \omega_2 &\hat{=} \text{erster Wurf Kopf, zweiter Wurf Zahl} \\ \omega_3 &\hat{=} \text{erster Wurf Zahl, zweiter Wurf Kopf} \\ \omega_4 &\hat{=} \text{erster Wurf Zahl, zweiter Wurf Zahl.}\end{aligned}$$

Da nicht bekannt ist, ob die Münze fair ist, könnte man die Situation so modellieren, dass alle Wahrscheinlichkeitsmaße, für die der zweite Wurf der Münze vom ersten Wurf stochastisch unabhängig ist mögliche zutreffende Wahrscheinlichkeitsmaße sind und eine untere Prävision durch Infimumbildung konstruieren. Die Klasse $M_1 := \{p_\theta | \theta \in [0, 1]\}$ der zulässigen Wahrscheinlichkeitsmaße kann durch den Parameter $\theta \in [0, 1]$ beschrieben werden:

$$\begin{aligned}p_\theta(\{\omega_1\}) &= \theta \cdot \theta \\ p_\theta(\{\omega_2\}) &= \theta \cdot (1 - \theta) \\ p_\theta(\{\omega_3\}) &= (1 - \theta) \cdot \theta = p_\theta(\{\omega_2\}) \\ p_\theta(\{\omega_4\}) &= (1 - \theta) \cdot (1 - \theta),\end{aligned}$$

sowie für beliebige Spiele $X \in \mathcal{L}(\Omega)$:

$$p_\theta(X) = \theta^2 \cdot X(\omega_1) + \theta \cdot (1 - \theta) \cdot X(\omega_2) + (1 - \theta) \cdot \theta \cdot X(\omega_3) + (1 - \theta)^2 \cdot X(\omega_4).$$

Die zugehörige untere Prävision \underline{P}_1 ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned}\underline{P}_1(\{\omega_1\}) &= \min_{\theta \in [0,1]} p_\theta(\{\omega_1\}) = \min_{\theta \in [0,1]} \theta \cdot \theta = 0 \\ \underline{P}_1(\{\omega_2\}) &= \min_{\theta \in [0,1]} p_\theta(\{\omega_2\}) = \min_{\theta \in [0,1]} \theta \cdot (1 - \theta) = 0 \\ \underline{P}_1(\{\omega_3\}) &= \min_{\theta \in [0,1]} p_\theta(\{\omega_3\}) = \min_{\theta \in [0,1]} (1 - \theta) \cdot \theta = \underline{P}(\{\omega_2\}) = 0 \\ \underline{P}_1(\{\omega_4\}) &= \min_{\theta \in [0,1]} p_\theta(\{\omega_4\}) = \min_{\theta \in [0,1]} (1 - \theta) \cdot (1 - \theta) = 0,\end{aligned}$$

bzw. für beliebiges $X \in \mathcal{L}(\Omega)$:

$$\underline{P}_1(X) = \min_{\theta \in [0,1]} \{\theta^2 \cdot X(\omega_1) + \theta \cdot (1 - \theta) \cdot X(\omega_2) + (1 - \theta) \cdot \theta \cdot X(\omega_3) + (1 - \theta)^2 \cdot X(\omega_4)\}.$$

Beispiel 2. Betrachte die Einschränkung der Prävision \underline{P}_1 aus Beispiel 1 auf 2^Ω bzw. deren natürliche Extension: $\underline{P}_2 := (\underline{P}_1|_{2^\Omega})^\diamond$. Da \underline{P}_1 kohärent ist stimmen \underline{P}_1 und \underline{P}_2 auf 2^Ω überein, denn für beliebiges $X \in 2^\Omega$ gilt:

$$\underline{P}_2(X) = (\underline{P}_1|_{2^\Omega})^\diamond(X) \leq (\underline{P}_1)^\diamond(X) = \underline{P}_1(X) = \underline{P}_1|_{2^\Omega}(X) \leq (\underline{P}_1|_{2^\Omega})^\diamond(X) = \underline{P}_2(X).$$

Wegen $(\underline{P}_2|_{2^\Omega})^\diamond = (\underline{P}_1|_{2^\Omega})^\diamond = \underline{P}_2 = \underline{P}_2^\diamond$ besitzt \underline{P}_2 wesentliche Domäne 2^Ω . Für $X \in 2^\Omega$ zeigt die folgende Tabelle die zugehörige Bewertung $\underline{P}_2(X)$ sowie die Möbiusinverse $m_2(X) := (\underline{P}_2 * \mu)(X)$:

X	$X(\omega_1)$	$X(\omega_2)$	$X(\omega_3)$	$X(\omega_4)$	$\underline{P}_2(X)$	$m_2(X)$
X_1	0	0	0	0	0	0
X_2	1	0	0	0	0	0
X_3	0	1	0	0	0	0
X_4	1	1	0	0	0	0
X_5	0	0	1	0	0	0
X_6	1	0	1	0	0	0
X_7	0	1	1	0	0	0
X_8	1	1	1	0	0	0
X_9	0	0	0	1	0	0
X_{10}	1	0	0	1	0.5	0.5
X_{11}	0	1	0	1	0	0
X_{12}	1	1	0	1	0.75	0.25
X_{13}	0	0	1	1	0	0
X_{14}	1	0	1	1	0.75	0.25
X_{15}	0	1	1	1	0	0
X_{16}	1	1	1	1	1	0

Tabelle 3.2.: Die Prävision \underline{P}_2

Da die Möbiusinverse m_2 auf 2^Ω nichtnegativ ist, ist \underline{P}_2 auf 2^Ω vollständig monoton. Wie wir später noch sehen werden (siehe Korollar 3.10.2) ist \underline{P}_2 auch auf $\mathcal{L}(\Omega)$ vollständig monoton.

Beispiel 3. Betrachte analog zu Beispiel 2 die Einschränkung von \underline{P}_1 auf $\mathcal{K} := \mathbb{N}_2^\Omega$.

$$\underline{P}_3 := (\underline{P}_1|_{\mathcal{K}})^\diamond.$$

\underline{P}_3 ist dann durch Angabe von \underline{P}_3 bzw. m_3 auf $\mathcal{K} = \mathbb{N}_2^\Omega$ durch die folgende Tabelle gegeben (gerundet auf vier Nachkommastellen):

Y	$Y(\omega_1)$	$Y(\omega_2)$	$Y(\omega_3)$	$Y(\omega_4)$	$\underline{P}_3(Y)$	$m_3(Y)$
Y_1	0	0	0	0	0	0
Y_2	0	0	0	1	0	0
Y_3	0	0	0	2	0	0
Y_4	0	0	1	0	0	0
Y_5	0	0	1	1	0	0
Y_6	0	0	1	2	0	0
Y_7	0	0	2	0	0	0
Y_8	0	0	2	1	0	0
Y_9	0	0	2	2	0	0
Y_{10}	0	1	0	0	0	0
Y_{11}	0	1	0	1	0	0
Y_{12}	0	1	0	2	0	0
Y_{13}	0	1	1	0	0	0
Y_{14}	0	1	1	1	0	0
Y_{15}	0	1	1	2	0	0
Y_{16}	0	1	2	0	0	0
Y_{17}	0	1	2	1	0	0
Y_{18}	0	1	2	2	0	0
Y_{19}	0	2	0	0	0	0
Y_{20}	0	2	0	1	0	0
Y_{21}	0	2	0	2	0	0
Y_{22}	0	2	1	0	0	0
Y_{23}	0	2	1	1	0	0
Y_{24}	0	2	1	2	0	0
Y_{25}	0	2	2	0	0	0
Y_{26}	0	2	2	1	0	0
Y_{27}	0	2	2	2	0	0
Y_{28}	1	0	0	0	0	0
Y_{29}	1	0	0	1	0.5	0.5
Y_{30}	1	0	0	2	0.6667	0.1667
Y_{31}	1	0	1	0	0	0
Y_{32}	1	0	1	1	0.75	0.25
Y_{33}	1	0	1	2	0.875	-0.0417
Y_{34}	1	0	2	0	0	0
Y_{35}	1	0	2	1	1	0.25
Y_{36}	1	0	2	2	1	-0.125
Y_{37}	1	1	0	0	0	0
Y_{38}	1	1	0	1	0.75	0.25
Y_{39}	1	1	0	2	0.875	-0.0417

Y	$Y(\omega_1)$	$Y(\omega_2)$	$Y(\omega_3)$	$Y(\omega_4)$	$\underline{P}_3(Y)$	$m_3(Y)$
Y_{40}	1	1	1	0	0	0
Y_{41}	1	1	1	1	1	0
Y_{42}	1	1	1	2	1	-0.0833
Y_{43}	1	1	2	0	0	0
Y_{44}	1	1	2	1	1	-0.25
Y_{45}	1	1	2	2	1	0.125
Y_{46}	1	2	0	0	0	0
Y_{47}	1	2	0	1	1	0.25
Y_{48}	1	2	0	2	1	-0.125
Y_{49}	1	2	1	0	0	0
Y_{50}	1	2	1	1	1	-0.25
Y_{51}	1	2	1	2	1	0.125
Y_{52}	1	2	2	0	0	0
Y_{53}	1	2	2	1	1	0
Y_{54}	1	2	2	2	1	0
Y_{55}	2	0	0	0	0	0
Y_{56}	2	0	0	1	0.6667	0.1667
Y_{57}	2	0	0	2	1	0.1667
Y_{58}	2	0	1	0	0	0
Y_{59}	2	0	1	1	0.875	-0.0417
Y_{60}	2	0	1	2	1.25	0.0833
Y_{61}	2	0	2	0	0	0
Y_{62}	2	0	2	1	1	-0.125
Y_{63}	2	0	2	2	1.5	0.25
Y_{64}	2	1	0	0	0	0
Y_{65}	2	1	0	1	0.875	-0.0417
Y_{66}	2	1	0	2	1.25	0.0833
Y_{67}	2	1	1	0	0	0
Y_{68}	2	1	1	1	1	-0.0833
Y_{69}	2	1	1	2	1.5	0.1667
Y_{70}	2	1	2	0	0	0
Y_{71}	2	1	2	1	1	0.125
Y_{72}	2	1	2	2	1.75	0
Y_{73}	2	2	0	0	0	0
Y_{74}	2	2	0	1	1	-0.125
Y_{75}	2	2	0	2	1.5	0.25
Y_{76}	2	2	1	0	0	0
Y_{77}	2	2	1	1	1	0.125
Y_{78}	2	2	1	2	1.75	0
Y_{79}	2	2	2	0	0	0
Y_{80}	2	2	2	1	1	0
Y_{81}	2	2	2	2	2	0

Tabelle 3.3.: Die Prävision \underline{P}_3

Da die Möbiusinverse hier auch negative Werte annimmt ist \underline{P}_3 nicht vollständig monoton. Wei-

terhin ist \underline{P}_3 nichteinmal supermodular, denn z.B. mit den Spielen $A := Y_{30} = (1, 0, 0, 2)$ und $B := Y_{32} = (1, 0, 1, 1)$ folgt:

$$\begin{aligned}
 \underline{P}_3(A) + \underline{P}_3(B) &= 0.6667 + 0.75 \\
 &= 1.4167 \\
 &> 1.375 \\
 &= 0.5 + 0.875 \\
 &= \underline{P}_3(Y_{29}) + \underline{P}_3(Y_{33}) \\
 &= \underline{P}_3(A \wedge B) + \underline{P}_3(A \vee B).
 \end{aligned}$$

Beispiel 4. Betrachte nun (mit den gleichen Bezeichnungen wie aus Beispiel 1) das zweimalige, eventuell abhängige Werfen einer fairen Münze. Dies kann repräsentiert werden durch zwei Wahrscheinlichkeitsmaße p_1 und p_2 bzw. deren konvexe Hülle $M_4 := \{\lambda \cdot p_1 + (1 - \lambda) \cdot p_2 | \lambda \in [0, 1]\}$. Dabei entspricht p_1 einem Wahrscheinlichkeitsmaß, bei dem der erste und der zweite Wurf extrem korreliert sind (also $p_1(\{\omega_2\}) = p_1(\{\omega_3\}) = 0$) und p_2 beschreibt eine extreme Antikorrelation zwischen erstem und zweitem Wurf (d.h. $p_2(\{\omega_1\}) = p_2(\{\omega_4\}) = 0$). Mit der Forderung einer fairen Münze folgt insgesamt für p_1 und p_2 :

$$\begin{aligned}
 p_1(\{\omega_2\}) &= p_1(\{\omega_3\}) = 0 \\
 p_1(\{\omega_1\}) &= p_1(\{\omega_4\}) = 0.5 \\
 p_2(\{\omega_1\}) &= p_2(\{\omega_4\}) = 0 \\
 p_2(\{\omega_2\}) &= p_2(\{\omega_3\}) = 0.5
 \end{aligned}$$

und die entsprechende Prävision \underline{P}_4 ergibt sich als untere Einhüllende von M_4 :

$$\underline{P}_4(X) = \min_{p \in M_4} p(X).$$

Bemerkung 3.7.1. \underline{P}_4 kann auch als

$$\underline{P}_4(X) = \min\{p_1(X), p_2(X)\}$$

dargestellt werden, denn p_1 und p_2 sind die Extrempunkte der schwach*-kompakten, konvexen Menge M (siehe Lemma 3.8.4). Weiterhin besitzt \underline{P}_4 wesentliche Domäne 2^Ω (denn es gilt

$$(\underline{P}_4|_{2^\Omega})^\diamond = (\mathcal{P} \circ \mathcal{M})(\underline{P}_4|_{2^\Omega}) = \mathcal{P}(\text{ext}(\mathcal{M}(\underline{P}_4|_{2^\Omega}))) = \mathcal{P}(\{p_1, p_2\}) = \underline{P}_4 = \underline{P}_4^\diamond,$$

siehe die Bemerkung zu Abb.3.4 S.108).

Deshalb genügt es zur Charakterisierung von \underline{P}_4 die Domäne 2^Ω zu betrachten:

X	$X(\omega_1)$	$X(\omega_2)$	$X(\omega_3)$	$X(\omega_4)$	$\underline{P}_4(X)$	$m_4(X)$
X_1	0	0	0	0	0	0
X_2	1	0	0	0	0	0
X_3	0	1	0	0	0	0
X_4	1	1	0	0	0.5	0.5
X_5	0	0	1	0	0	0
X_6	1	0	1	0	0.5	0.5
X_7	0	1	1	0	0	0
X_8	1	1	1	0	0.5	-0.5
X_9	0	0	0	1	0	0
X_{10}	1	0	0	1	0.5	0
X_{11}	0	1	0	1	0.5	0.5
X_{12}	1	1	0	1	0.5	-0.5
X_{13}	0	0	1	1	0.5	0.5
X_{14}	1	0	1	1	0.5	-0.5
X_{15}	0	1	1	1	0.5	-0.5
X_{16}	1	1	1	1	1	1

Tabelle 3.4.: Die Prävision \underline{P}_4

\underline{P}_4 ist hier wieder nicht supermodular ($\underline{P}_4(X_4) + \underline{P}_4(X_6) = 0.5 + 0.5 = 1 > 0.5 = 0 + 0.5 = \underline{P}_4(X_2) + \underline{P}_4(X_8) = \underline{P}_4(X_4 \wedge X_6) + \underline{P}_4(X_4 \vee X_6)$).

Beispiel 5. Sei bekannt, dass die Münze in etwa fair ist, und dass der erste Wurf den zweiten Wurf nur wenig beeinflusst. Diese Situation könnte man modellieren, indem man alle Wahrscheinlichkeitsmaße in der „Nähe“ des Wahrscheinlichkeitsmaßes $q := (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ als zulässig betrachtet. Als Abstandsmaß wählen wir zum Beispiel das euklidische Maß

$$d(p_1, p_2) := \sqrt{\sum_{i=1}^4 (p_1(X_i) - p_2(X_i))^2}.$$

Die Prävision \underline{P}_5 ergibt sich dann zu

$$\underline{P}_5(X) := \min_{p \in M_5} p(X)$$

mit

$$M_5 := \{p \in \mathcal{P}(\Omega) \mid d(p, q) \leq \alpha\}.$$

Für den Parameter α wählen wir hier $\alpha = 0.1$. Auf 2^Ω ergibt sich dann \underline{P}_5 zu:

X	$X(\omega_1)$	$X(\omega_2)$	$X(\omega_3)$	$X(\omega_4)$	$\underline{P}_5(X)$	$m_5(X)$
X_1	0	0	0	0	0	0
X_2	1	0	0	0	0.165	0.165
X_3	0	1	0	0	0.165	0.165
X_4	1	1	0	0	0.4	0.07
X_5	0	0	1	0	0.165	0.165
X_6	1	0	1	0	0.4	0.07
X_7	0	1	1	0	0.4	0.07
X_8	1	1	1	0	0.665	-0.04
X_9	0	0	0	1	0.165	0.165
X_{10}	1	0	0	1	0.4	0.07
X_{11}	0	1	0	1	0.4	0.07
X_{12}	1	1	0	1	0.665	-0.04
X_{13}	0	0	1	1	0.4	0.07
X_{14}	1	0	1	1	0.665	-0.04
X_{15}	0	1	1	1	0.665	-0.04
X_{16}	1	1	1	1	1	0.08

Tabelle 3.5.: Die Prävision \underline{P}_5

Die Möbiusinverse ist auf einigen Mengen negativ, \underline{P}_5 eingeschränkt auf 2^Ω ist hier aber trotzdem supermodular.

Beispiel 6. Die letzte Prävision soll durch ein basic probability assignment erzeugt werden. Als einfaches Beispiel wählen wir ein assignment auf 2^Ω , bei dem jeder nichtleeren Menge die gleiche Masse $m(X) := c = \frac{1}{15}$ zugeordnet wird. Die zugeordnete Prävision

$$\underline{P}_6(X) := \sum_{Y \subseteq X} m(Y) = \frac{2^{|X|} - 1}{15}$$

ist dann wegen $\underline{P}_6(\emptyset) = 0$ und $\underline{P}_6(\Omega) = 1$ eine belief-Funktion und somit automatisch kohärent (siehe Satz 3.5.15 und Lemma 3.8.15). Die Prävision \underline{P}_6 wird in Tabelle 4 wiedergegeben:

X	$X(\omega_1)$	$X(\omega_2)$	$X(\omega_3)$	$X(\omega_4)$	$\underline{P}_6(X)$	$m_6(X)$
X_1	0	1	0	1	0	0
X_2	0	0	1	1	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
X_3	0	0	0	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
X_4	0	0	0	0	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$
X_5	0	1	0	1	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
X_6	0	0	1	1	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$
X_7	0	0	0	0	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$
X_8	0	0	0	0	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$
X_9	0	1	0	1	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
X_{10}	0	0	1	1	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$
X_{11}	0	0	0	0	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$
X_{12}	0	0	0	0	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$
X_{13}	0	1	0	1	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$
X_{14}	0	0	1	1	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$
X_{15}	0	0	0	0	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$
X_{16}	0	0	0	0	$\frac{15}{15}$	$\frac{1}{15}$

Tabelle 3.6.: Die Prävision \underline{P}_6

3.8. Der Kern einer kohärenten Prävision

In diesem Abschnitt wollen wir die Struktur des Kernes einer kohärenten unteren Prävision \underline{P} untersuchen. Ist der Grundraum $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ endlich, so ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω bzw. eine lineare Prävision über $\mathcal{L}(\Omega)$ durch einen Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ mit:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : p_i \geq 0$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

durch die Vorschrift

$$p(X) = \sum_{i=1}^n X(\omega_i) \cdot p_i$$

gegeben. Sei weiter für eine nichtleere Menge $M \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ die zugeordnete untere Prävision \underline{P}_M definiert durch:

$$\underline{P}_M : \mathcal{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \inf_{p \in M} p(X).$$

Diese Abbildung ist in der Tat reellwertig, da für beliebige $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ die Ungleichung

$$p(X) \geq \inf X > -\infty$$

gilt.

Bemerkung 3.8.1. Für eine nichtleere Menge M ist die untere Prävision \underline{P}_M kohärent, denn es gelten die Axiome

(P1) $\forall X \in \mathcal{L}(\Omega) :$

$$\underline{P}_M(X) \geq \min_{\omega \in \Omega} X(\omega)$$

(P2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}, X \in \mathcal{L}(\Omega) :$

$$\underline{P}_M(\lambda X) = \inf_{p \in M} p(\lambda X) = \lambda \inf_{p \in M} p(X) = \lambda \underline{P}_M(X)$$

(P3) $\forall X, Y \in \mathcal{L}(\Omega) :$

$$\underline{P}_M(X + Y) = \inf_{p \in M} (p(X) + p(Y)) \geq \inf_{p \in M} p(X) + \inf_{p \in M} p(Y) = \underline{P}_M(X) + \underline{P}_M(Y).$$

Satz 3.8.2. *Die Abbildung*

$$\mathcal{M} : \text{ASL}(\Omega) \longrightarrow 2^{\mathcal{P}(\Omega)} \setminus \{\emptyset\} : \underline{P} \mapsto \mathcal{M}(\underline{P}) = \{p \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \forall X \in \text{dom}(\underline{P}) : p(X) \geq \underline{P}(X)\}$$

und die Abbildung

$$\mathcal{P} : 2^{\mathcal{P}(\Omega)} \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \text{ASL}(\Omega) : M \mapsto \mathcal{P}(M) : \mathcal{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \inf_{p \in M} p(X)$$

bilden eine Galoisverbindung bezüglich $(\text{ASL}(\Omega), \leq)$ und $(2^{\mathcal{P}(\Omega)} \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$.

Beweis: Seien $Q \in \text{ASL}(\Omega)$ und $M \in 2^{\mathcal{P}(\Omega)} \setminus \{\emptyset\}$ beliebig. Dann ist die Äquivalenz

$$Q \leq \mathcal{P}(M) \iff \mathcal{M}(Q) \supseteq M$$

zu zeigen:

„ \Rightarrow “: Sei $p \in M$ beliebig. Dann ist $p \in \mathcal{M}(Q)$ zu zeigen. Sei dazu $X \in \text{dom}(Q)$ beliebig. Dann gilt nach Voraussetzung: $p(X) \geq \inf_{q \in M} q(X) = (\mathcal{P}(M))(X) \geq Q(X)$ und somit ist $p \in \mathcal{M}(Q)$ gezeigt.

„ \Leftarrow “: Sei $X \in \text{dom}(Q)$ und $p \in M$ beliebig. Dann gilt $p(X) \geq Q(X)$, da p nach Voraussetzung auch aus $\mathcal{M}(Q)$ ist. Da $p \in M$ beliebig war folgt: $(\mathcal{P}(M))(X) = \inf_{q \in M} q(X) \geq Q(X)$ und somit ist $Q \leq \mathcal{P}(M)$ gezeigt. ■

Kohärente Prävisionen sind also die Hüllen des Hüllenoperators $\mathcal{P} \circ \mathcal{M}$ und die Kerne von Prävisionen, die sicheren Verlust vermeiden, sind die Hüllen des Hüllenoperators $\mathcal{M} \circ \mathcal{P}$. Dies folgt aus dem lower envelope Theorem bzw. aus der Relation

$$\begin{aligned} \{\mathcal{M}(\underline{P}) \mid \underline{P} \in \text{ASL}(\Omega)\} &= \{(\mathcal{M} \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{M})(\underline{P}) \mid \underline{P} \in \text{ASL}(\Omega)\} \\ &= \{(\mathcal{M} \circ \mathcal{P})(\mathcal{M}(\underline{P})) \mid \underline{P} \in \text{ASL}(\Omega)\} \\ &\subseteq \{(\mathcal{M} \circ \mathcal{P})(M) \mid M \in 2^{\mathcal{P}(\Omega)} \setminus \{\emptyset\}\} \\ &= \{\mathcal{M}(\mathcal{P}(M)) \mid M \in 2^{\mathcal{P}(\Omega)} \setminus \{\emptyset\}\} \\ &\subseteq \{\mathcal{M}(\underline{P}) \mid \underline{P} \in \text{ASL}(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Der Operator $\mathcal{P} \circ \mathcal{M}$ ordnet einer Prävision \underline{P} , die sicheren Verlust vermeidet, die kleinste kohärente Prävision zu, die \underline{P} auf $\mathcal{K} := \text{dom}(\underline{P})$ dominiert, denn für eine weitere kohärente Prävision Q mit Domäne $\mathcal{K}' \supseteq \mathcal{K}$ und $\underline{P} \leq_{\mathcal{K}} Q$ folgt $(\mathcal{P} \circ \mathcal{M})(\underline{P}) \leq (\mathcal{P} \circ \mathcal{M})(Q)$ und für $X \in \mathcal{K}'$ folgt $[(\mathcal{P} \circ \mathcal{M})(\underline{P})](X) \leq [(\mathcal{P} \circ \mathcal{M})(Q)](X) = Q(X)$. Aus dieser Tatsache folgt $\mathcal{P} \circ \mathcal{M} \leq \underline{P}^\diamond$ und aus Lemma 3.2.11 (e) folgt analog $\underline{P}^\diamond \leq \mathcal{P} \circ \mathcal{M}$ und somit ist der Operator $\mathcal{P} \circ \mathcal{M}$ genau der Operator \diamond .

Definition 3.8.3. Eine Menge $M \in 2^{\mathcal{P}(\Omega)}$ heißt **konvex**, falls gilt:

$$\forall p_1, p_2 \in M, \lambda \in [0, 1] : \lambda \cdot p_1 + (1 - \lambda) \cdot p_2 \in M.$$

Die **konvexe Hülle** von M ist definiert als der Schnitt aller konvexen Obermengen von M , der wieder konvex ist. Die Menge der **Extrempunkte** von M ist definiert als:

$$\text{ext}(M) := \{p \in M \mid \forall \lambda \in (0, 1), q, r \in \mathcal{M}(\underline{P}) : \lambda q + (1 - \lambda)r = p \implies p = q = r\}.$$

Weiter ist die Menge der Extrempunkte einer Prävision definiert als die Menge der Extrempunkte ihres Kernes.

Lemma 3.8.4. Der Kern einer unteren Prävision, versehen mit der schwach*-Topologie ist eine konvexe, kompakte Teilmenge von $\mathcal{P}(\Omega)$. Der Operator $\mathcal{M} \circ \mathcal{P}$ ordnet jeder (nichtleeren) Menge $M \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ den (schwach*-) Abschluss der konvexen Hülle von M zu:

$$(\mathcal{M} \circ \mathcal{P})(M) = \overline{\text{co}}(M).$$

Weiterhin gilt für (nichtleere) konvexe, schwach*-kompakte Mengen $M \in 2^{\mathcal{P}(\Omega)}$:

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(\text{ext}(M)).$$

Dies bedeutet insbesondere für kohärente Prävisionen die Gleichheit

$$\underline{P} = \mathcal{P}(\mathcal{M}(\underline{P})) = \mathcal{P}(\text{ext } \mathcal{M}(\underline{P})),$$

d.h., kohärente Prävisionen werden bereits durch die Extrempunkte ihres Kernes erzeugt. Weiterhin heißt dies auch, dass ein $M \subseteq \mathcal{P}$ nicht immer aus der von ihr erzeugten Prävision $\mathcal{P}(M)$ rekonstruiert werden kann, d.h. Modelle $M \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ können im Allgemeinen mehr Information enthalten als kohärente Prävisionen.

Beweis: Konvexität:

Sei $\lambda \in [0, 1]$ und $p, q \in \mathcal{M}(\underline{P})$ sowie $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ beliebig. Dann gilt:

$$(\lambda \cdot p + (1 - \lambda)q)(X) = \lambda \cdot p(X) + (1 - \lambda)q(X) \geq \lambda \cdot \underline{P}(X) + (1 - \lambda) \underline{P}(X) = \underline{P}(X)$$

und $\lambda p + (1 - \lambda)q$ ist folglich aus $\mathcal{M}(\underline{P})$.

Kompaktheit: Wende den Satz von Alaoglu-Bourbaki auf den normierte Raum $(X = \mathcal{L}(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ an. Dann folgt, dass die abgeschlossene Einheitskugel

$$B_{X'} = \{p \in X' : \|p\| \leq 1\}$$

schwach*-kompakt ist. Der Kern

$$\mathcal{M}(\underline{P}) = \bigcap_{X \geq 0} \{p \in X' | p(X) \geq 0\} \cap \{p \in X' | p(\mathbb{1}_\Omega) = 1\} \cap \bigcap_{X \in \text{dom}(\underline{P})} \{p \in X' | p(X) \geq \underline{P}(X)\} \subseteq B_{X'}$$

ist als Schnitt abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen und deshalb als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $B_{X'}$ selbst kompakt.

Sei nun $M \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ beliebig aber nichtleer. Da $(\mathcal{M} \circ \mathcal{P})(M)$ eine konvexe abgeschlossene Obermenge von M ist gilt

$$(\mathcal{M} \circ \mathcal{P})(M) \supseteq \overline{\text{co}}(M).$$

Wenn

$$(\mathcal{M} \circ \mathcal{P})(M) \supsetneq \overline{\text{co}}(M)$$

gelten würde, so würde ein p aus $(\mathcal{M} \circ \mathcal{P})(M) \setminus \overline{\text{co}}(M)$ existieren, das durch ein schwach*-stetiges Funktional X , also ein Auswertungsfunktional (siehe) von der Menge $\overline{\text{co}}(M)$ strikt getrennt werden könnte, d.h. es würde gelten:

$$p(X) < \inf_{q \in \overline{\text{co}}(M)} q \leq (\mathcal{P}(M))(X),$$

was im Widerspruch zur Aussage $p \in (\mathcal{M} \circ \mathcal{P})(M)$ stünde. Der letzte Punkt folgt direkt aus dem Satz von Krein-Milman:

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(\overline{\text{co}}(\text{ext}(M))) = \mathcal{P}((\mathcal{M} \circ \mathcal{P})(\text{ext}(M))) = \mathcal{P}(\text{ext}(M)).$$

■

Um die Extrempunkte des Kernes einer kohärenten Prävision zu untersuchen benötigen wir zunächst einige Definitionen. Im Folgenden setzen wir, soweit nichts gegenteiliges gesagt wird, voraus, dass $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ endlich ist.

Definition 3.8.5. Sei $\underline{P} : 2^\Omega \supseteq \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Kapazität, die sicheren Verlust vermeidet. Sei weiter $K = \{K_0, \dots, K_n\}$ mit $\emptyset = K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft K_2 \triangleleft \dots \triangleleft K_n = \Omega$ eine maximale Kette in 2^Ω und $\sigma \in S(n)$ die durch die Vorschrift

$$\sigma(i) = k \quad \text{falls } \omega_k \in K_i \setminus K_{i-1} \quad i = 1, \dots, n$$

zugeordnete Permutation über $\{1, \dots, n\}$. Dann können dieser Kette bzw. Permutation die Wahrscheinlichkeitsmaße p_σ mit

$$p_\sigma(K_i) = \underline{P}(K_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (*)$$

und p_σ^*

mit

$$p_\sigma^*(K_1) = \min\{p(K_1) | p \in \mathcal{M}(\underline{P})\}$$

und

$$p_\sigma^*(K_{i+1}) = \min\{p(K_{i+1}) | p \in \mathcal{M}(\underline{P}), p(K_1) = p_\sigma^*(K_1), p(K_2) = p_\sigma^*(K_2), \dots, p(K_i) = p_\sigma^*(K_i)\}$$

zugeordnet werden.

Zunächst ist zu zeigen, dass p_σ und p_σ^* wirklich Wahrscheinlichkeitsmaße sind. Für p_σ gilt:

$$\begin{aligned} p_\sigma(\{\omega_{\sigma(i)}\}) &= p_\sigma(K_i) - p_\sigma(K_{i-1}) = \underline{P}(K_i) - \underline{P}(K_{i-1}) \geq 0 \\ p_\sigma(\Omega) &= p_\sigma(K_n) = \underline{P}(K_n) = \underline{P}(\Omega) = 1. \end{aligned}$$

Für p_σ^* ist zunächst zu bemerken, dass alle Mengen, über die minimiert wird, als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen und als abgeschlossene Teilmengen der kompakten Menge $\mathcal{P}(\Omega)$ kompakt sind. Wegen der Stetigkeit der Auswertungsfunktionale $p \mapsto p(K_i)$ wird das Minimum also immer angenommen und alle Mengen, über die minimiert wird, sind folglich nichtleer. Damit ist p_σ^* wohldefiniert. Da nach Konstruktion p_σ^* mit einem $p \in \mathcal{M}(\underline{P})$ übereinstimmt ist p_σ^* trivialerweise ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Bemerkung 3.8.6. Wegen des lower envelope Theorems gilt für kohärentes \underline{P} immer

$$p_\sigma^*(K_1) = \underline{P}(K_1).$$

Definition 3.8.7. Eine maximale Kette K in 2^Ω bzw. eine Permutation σ über $\{1, \dots, n\}$ heißt **zulässig** (bezüglich \underline{P}), falls das zugehörige p_σ zulässig ist, d.h., wenn $p_\sigma \in \mathcal{M}(\underline{P})$ gilt.

Lemma 3.8.8. Sei $\underline{P} : 2^\Omega \subseteq \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ eine untere Prävision, die sicheren Verlust vermeidet. Eine Permutation über $\{1, \dots, n\}$ ist genau dann zulässig bezüglich \underline{P} , wenn $p_\sigma = p_\sigma^*$ gilt.

Beweis:

„ \Rightarrow “: Wir zeigen mit vollständiger Induktion über K_1, \dots, K_n , dass die Wahrscheinlichkeitsmaße auf allen K_i übereinstimmen: Da p_σ zulässig ist, gilt:

$$p_\sigma(K_1) \geq p_\sigma^*(K_1) = \min\{p(K_1) | p \in \mathcal{M}(\underline{P})\}. \text{ Außerdem gilt:}$$

$$p_\sigma^*(K_1) = \min\{p(K_1) | p \in \mathcal{M}(\underline{P})\} \geq \underline{P}(K_1) = p_\sigma(K_1)$$

und es folgt

$$p_\sigma^*(K_1) = p_\sigma(K_1).$$

Gelte nun $p_\sigma^*(K_l) = p_\sigma(K_l)$ für $l = 1, \dots, i$. Da p_σ zulässig ist und auf K_1, \dots, K_i mit p_σ^* übereinstimmt gilt wieder:

$$p_\sigma(K_{i+1}) \geq p_\sigma^*(K_{i+1})$$

Für beliebiges $p \in \mathcal{M}(\underline{P})$ gilt weiter: $p(K_{i+1}) \geq \underline{P}(K_{i+1}) = p_\sigma(K_{i+1})$ und es folgt die Gleichheit von p_σ und p_σ^* auf K_{i+1} .

„ \Leftarrow “: Da p_σ^* aus $\mathcal{M}(\underline{P})$ ist folgt sofort: $p_\sigma = p_\sigma^* \in \mathcal{M}(\underline{P})$.

■

Satz 3.8.9. Sei \underline{P} eine untere Prävision, die sicheren Verlust vermeidet. Die den Permutationen über $\{1, \dots, n\}$ zugeordneten p_σ^* sind Extrempunkte des Kernes von \underline{P} .

Beweis: Sei σ eine beliebige Permutation über $\{1, \dots, n\}$. Dann ist p_σ^* in $\mathcal{M}(\underline{P})$. Seien nun $q, r \in \mathcal{M}(\underline{P})$ und $\lambda \in (0, 1)$ beliebig mit $p_\sigma^* = \lambda q + (1 - \lambda)r$. Da p und r zulässig sind gilt

$$q(K_1) \geq p_\sigma^* \quad \text{bzw.} \quad r(K_1) \geq p_\sigma^*$$

und mit $p_\sigma^*(K_1) = \lambda q(K_1) + (1 - \lambda)r(K_1)$ folgt notwendigerweise

$$p_\sigma^*(K_1) = q(K_1) = r(K_1).$$

Analog folgt aus $p_\sigma^*(K_l) = q(K_l) = r(K_l)$ für $l = 1, \dots, i$ immer

$$p_\sigma^*(K_{i+1}) = q(K_{i+1}) = r(K_{i+1}),$$

so dass mit vollständiger Induktion die Gleichheit $p_\sigma^* = q = r$ gezeigt ist. Dies bedeutet, dass p_σ^* ein Extrempunkt von $\mathcal{M}(\underline{P})$ ist.

■

Bemerkung 3.8.10. Es stellt sich nun die Frage, ob die p_σ^* bereits alle Extrempunkte des Kernes $\mathcal{M}(\underline{P})$ sind. Dies ist im Allgemeinen nicht so (siehe die Bemerkung zu \underline{P}_3 , S.107). Shapley hat in [31] gezeigt, dass für supermodulare untere Wahrscheinlichkeiten alle Extrempunkte genau die p_σ (bzw. die p_σ^*) sind. es wird sich im nächsten Abschnitt herausstellen, dass dies auch für supermodulare kohärente Prävisionen gilt.

Lemma 3.8.11. Sei \underline{P} eine kohärente untere Prävision über $\mathcal{L}(\Omega)$ mit wesentlicher Domäne $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)_{\geq 0}$ und $\mathcal{K} \supseteq 2^\Omega$. Sei weiter zu einer maximalen Kette K und zugeordneter Permutation σ dass Maß q rekursiv gegeben durch:

$$\begin{aligned} q(\emptyset) &= 0, \\ q(\{\omega_{\sigma(i+1)}\}) &= \sup\left\{\frac{1}{\lambda}[P(A) - q(\tilde{A})] \mid A \in \mathcal{K}, \text{supp}(A) \subseteq K_{i+1}, \lambda > 0\right\} \end{aligned}$$

mit

$$i = 0, \dots, n-1,$$

$$\lambda := A(\omega_{\sigma(i+1)}),$$

und

$$\tilde{A} := A - \lambda \cdot \{\omega_{\sigma(i+1)}\}.$$

Falls $q(\Omega) = 1$ gilt, so ist q der zu K bzw. σ gehörige Extrempunkt p_σ^* von $\mathcal{M}(\underline{P})$.

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass für das so definierte Maß gilt:

$$q(A) \geq \underline{P}(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{K},$$

woraus bereits

$$q(A) \geq \underline{P}(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{L}(\Omega)$$

folgt. Sei also $A \in \mathcal{K}$ beliebig aber nicht leer ($q(\emptyset) = 0 \geq 0 = \underline{P}(\emptyset)$ gilt trivialerweise). Betrachte nun das kleinste i mit $\text{supp}(A) \subseteq K_{i+1}$. Dann muß $A(\omega_{\sigma(i+1)}) > 0$ gelten, da sonst auch für $i-1$ die Relation $\text{supp}(A) \subseteq K_i$ gelten würde, was im Widerspruch zur gewählten Minimalität von i stünde. Es folgt nun

$$q(\{\omega_{\sigma(i+1)}\}) \geq \frac{1}{\lambda} [\underline{P}(A) - q(\tilde{A})],$$

also

$$\underline{P}(A) \leq \lambda \cdot q(\{\omega_{\sigma(i+1)}\}) + q(\tilde{A}) = q(\lambda \cdot \{\omega_{\sigma(i+1)}\} + A - \lambda \cdot \{\omega_{\sigma(i+1)}\}) = q(A).$$

Insgesamt ist also q aus $\mathcal{M}(\underline{P})$ und wir können die Identität von q und p_σ^* per vollständiger Induktion zeigen:

Da \underline{P} kohärent ist gilt

$$q(K_1) = \max_{\mu} \left\{ \frac{1}{\mu} \underline{P}(\mu \cdot K_1) \mid \mu \in \mathbb{R}_{>0}, \mu \cdot K_1 \in \mathcal{K} \right\} = \underline{P}(K_1) = p_\sigma^*(K_1).$$

Gelte nun $q(K_l) = p_\sigma^*(K_l)$ für $l = 1, \dots, i$. Dann folgt

$$p_\sigma^*(K_{i+1}) \leq q(K_{i+1}),$$

denn p_σ^* und q stimmen auf K_1, \dots, K_i überein und q ist aus $\mathcal{M}(\underline{P})$. Würde $<$ gelten, so würde ein Spiel A mit $\text{supp}(A) \subseteq K_{i+1}$, $\lambda \neq 0$ und

$$p_\sigma^*(\{\omega_{\sigma(i+1)}\}) < \frac{1}{\lambda} [\underline{P}(A) - q(\tilde{A})]$$

bzw.

$$q(\tilde{A}) + \lambda \cdot p_{\sigma}^*(\{\omega_{\sigma(i+1)}\}) < \underline{P}(A)$$

existieren. Da $\text{supp}(\tilde{A}) \subseteq K_i$ gilt ist $q(\tilde{A})$ gleich $p_{\sigma}^*(\tilde{A})$ und es würde

$$\begin{aligned} p_{\sigma}^*(A) &= p_{\sigma}^*(\tilde{A} + \lambda \cdot \{\omega_{\sigma(i+1)}\}) \\ &= p_{\sigma}^*(\tilde{A}) + \lambda \cdot p_{\sigma}^*(\{\omega_{\sigma(i+1)}\}) \\ &= q(\tilde{A}) + \lambda \cdot p_{\sigma}^*(\{\omega_{\sigma(i+1)}\}) \\ &< \underline{P}(A) \end{aligned}$$

folgen, was im Widerspruch zur Zulässigkeit von p_{σ}^* stünde. Also gilt $p_{\sigma}^*(K_{i+1}) = q(K_{i+1})$. ■

Bemerkung 3.8.12. Für den Fall, dass alle maximalen Ketten in 2^{Ω} zulässig bezüglich einer Prävision \underline{P} sind, lassen sich die p_{σ}^* natürlich einfach nach Definition 3.8.5 (*) berechnen, deshalb kann man fragen, für welche Prävisionen alle maximalen Ketten zulässig sind. Für Kapazitäten über 2^{Ω} gilt, dass alle maximalen Ketten genau dann zulässig sind, wenn \underline{P} supermodular ist. Die Hinrichtung wurde von Ishiishi ([17]) und die Rückrichtung wurde von Shapley ([31]) gezeigt (alternativ siehe [5], S.277 für einen Beweis beider Richtungen). Diese Äquivalenz gilt auch für untere kohärente Prävisionen mit beliebiger wesentlicher Domäne $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)_{\geq 0}$:

Lemma 3.8.13. Sei \underline{P} eine kohärente Prävision mit wesentlicher Domäne $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)_{\geq 0}$ und $\mathcal{K} \supseteq 2^{\Omega}$. Dann sind alle maximalen Ketten in 2^{Ω} zulässig bezüglich \underline{P} genau dann, wenn \underline{P} supermodular ist.

Beweis: Wir zeigen zunächst nur die Rückrichtung. Die Hinrichtung folgt mit Satz 3.10.3 . Es ist also zu zeigen, dass für eine beliebige maximale Kette K in 2^{Ω} die zugeordneten p_{σ}^* und p_{σ} übereinstimmen. Dazu reicht es nach Lemma 3.8.11 zu zeigen , dass die Ungleichung

$$\lambda[\underline{P}(K_{i+1}) - \underline{P}(K_i)] \geq \underline{P}(A) - q(\tilde{A})$$

für $i = 0, \dots, n-1$ und beliebiges $A \in \mathcal{K}$ mit $\text{supp}(A) \subseteq K_{i+1}$ und $\lambda = A(\omega_{\sigma(i+1)}) > 0$ gilt, denn dann wird das Supremum in der Berechnungsvorschrift von q für $A = K_{i+1}$ angenommen und es folgt $q = p_{\sigma}$ und insbesondere $q(\Omega) = p_{\sigma}(\Omega) = 1$, woraus mit Lemma 3.8.11 schließlich $p_{\sigma} = q = p_{\sigma}^*$ folgt. Sei dazu b definiert als $b := \frac{1}{\lambda} \max_{\omega \in \Omega} \tilde{A}(\omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{P}(A) + \lambda \underline{P}(b \cdot K_i) &= \underline{P}(A) + \underline{P}(\lambda b \cdot K_i) \\ &\leq \underline{P}(A \vee \lambda b \cdot K_i) + \underline{P}(A \wedge \lambda b \cdot K_i) \\ &= \underline{P}(\lambda[b \cdot K_i + \{\omega_{\sigma(i+1)}\}]) + \underline{P}(\tilde{A}) \\ &= \underline{P}(\lambda[K_{i+1} + (b-1) \cdot K_i]) + \underline{P}(\tilde{A}) \\ &\leq \underline{P}(\lambda K_{i+1}) + \underline{P}(\lambda(b-1) \cdot K_i) + \underline{P}(\tilde{A}) \\ &= \lambda \underline{P}(K_{i+1}) + \lambda \underline{P}((b-1) \cdot K_i) + \underline{P}(\tilde{A}). \end{aligned}$$

Mit $\underline{P}(K_i) \leq \underline{P}(b \cdot K_i) - \underline{P}((b-1) \cdot K_i)$ folgt

$$\begin{aligned} \underline{P}(A) + \lambda \underline{P}(K_i) &\leq \underline{P}(A) + \lambda[\underline{P}(b \cdot K_i) - \underline{P}((b-1) \cdot K_i)] \\ &\leq \lambda \underline{P}(K_{i+1}) + \underline{P}(\tilde{A}), \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. ■

Bemerkung 3.8.14. Da die Äquivalenz aus Lemma 3.8.13 auch für Kapazitäten über 2^Ω gilt sind supermodulare Kapazitäten über 2^Ω bereits kohärent: Betrachte für beliebiges $X \in 2^\Omega$ eine maximale Kette K mit $X \in X$. Dann folgt für das zugehörige p_σ :

$$\begin{aligned} p_\sigma &\in \mathcal{M}(\underline{P}) \\ \underline{P}(X) &\leq p_\sigma(X) = \underline{P}(X), \end{aligned}$$

so dass nach dem Lower envelope Theorem \underline{P} kohärent ist.

Weiterhin gilt diese Aussage auch für unendliches Ω :

Lemma 3.8.15. *Sei Ω endlich oder unendlich. Dann ist jede supermodulare Kapazität über 2^Ω kohärent.*

Beweis: Zunächst konstruieren wir allgemein für eine Menge $M \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ eine Ununterscheidbarkeitsrelation \sim_M auf Ω :

$$\sim_M = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega \mid \forall X \in M : X(\omega_1) = X(\omega_2)\}.$$

Die Ununterscheidbarkeitsrelation \sim_M ist nach Konstruktion eine Äquivalenzrelation. Wir betrachten nun den Faktorraum

$$\Omega' := \Omega / \sim_M = \{[\omega] \mid \omega \in \Omega\} = \{\{\omega' \in \Omega \mid \omega \sim_M \omega'\} \mid \omega \in \Omega\}$$

und definieren die Abbildung Φ_M durch:

$$\Phi_M : \tilde{M} \longrightarrow \mathcal{L}(\Omega') : X \mapsto \Phi(X) : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R} : ([\omega]) \mapsto X(\omega)$$

mit

$$\tilde{M} = \{X \in \mathcal{L}(\Omega) \mid \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega : \omega_1 \sim_M \omega_2 \implies X(\omega_1) = X(\omega_2)\}.$$

Diese Abbildung ist in der Tat wohldefiniert und ein Isomorphismus zwischen $(\tilde{M}, \wedge, \vee, +, -, \cdot, 0_\Omega, \mathbf{1}_\Omega)$ und $(\text{Im}(\Phi), \wedge, \vee, +, -, \cdot, 0_{\Omega'}, \mathbf{1}_{\Omega'})$, d.h., es gilt für alle

$X, Y \in M, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(X \wedge Y) = \Phi(X) \wedge \Phi(Y)$$

$$\Phi(X \vee Y) = \Phi(X) \vee \Phi(Y)$$

$$\Phi(X + Y) = \Phi(X) + \Phi(Y)$$

$$\Phi(X - Y) = \Phi(X) - \Phi(Y)$$

$$\Phi(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot \Phi(X)$$

$$\Phi(0_\Omega) = 0_{\Omega'}$$

$$\Phi(\mathbf{1}_\Omega) = \mathbf{1}_{\Omega'}$$

und es gibt eine inverse Abbildung

$$\Phi^{-1} : \text{Im}(\Phi) \longrightarrow \tilde{M} : X \mapsto \Phi^{-1}(X) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto X([\omega])$$

mit

$$\forall X \in M : \Phi^{-1}(\Phi(X)) = X$$

$$\forall Y \in \text{Im}(M) : \Phi(\Phi^{-1}(Y)) = Y.$$

Außerdem gilt für alle $\omega \in \Omega$ und beliebiges $X \in \tilde{M}$:

$$X(\omega) = (\Phi(X))([\omega]).$$

Der Prävision $\underline{P} : \mathcal{L}(\Omega) \supseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei in natürlicher Weise die Prävision \underline{Q} durch

$$\underline{Q} : \Phi[\mathcal{H} \cap \tilde{M}] \longrightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \underline{P}(\Phi^{-1}(X))$$

zugeordnet.

Nun zum eigentlichen Beweis: Sei $\underline{P} : 2^\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine supermodulare Kapazität und $m, n \in \mathbb{N}, X_0, X_1, \dots, X_n \in 2^\Omega$. Betrachte die endliche Menge $M = \{X_0, \dots, X_n\}$.

Dann ist der von \sim_M erzeugte Faktorraum

$$\begin{aligned} \Omega' &= \{[\omega] \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \{\{\omega \in \Omega \mid ((X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) = v) \mid v \in \{0, 1\}^n\} \setminus \{\emptyset\} \end{aligned}$$

offensichtlich endlich. Da mit \underline{P} auch die Prävision

$$\underline{Q} : 2^{\Omega'} \longrightarrow \mathbb{R} : Y \mapsto \underline{P}(\Phi^{-1}(Y))$$

eine supermodulare Kapazität und damit kohärent ist folgt:

$$\sup \left[\sum_{j=1}^n (\Phi(X_j) - \underline{Q}(\Phi(X_j))) - m(\Phi(X_0) - \underline{Q}(\Phi(X_0))) \right] \geq 0$$

und schließlich

$$\begin{aligned} & \sup_{\omega \in \Omega} \left[\sum_{j=1}^n (X_j(\omega) - \underline{P}(X_j)) - m(X_0(\omega) - \underline{P}(X_0)) \right] \\ &= \sup_{[\omega] \in \Omega'} \left[\sum_{j=1}^n ((\Phi(X_j))([\omega]) - \underline{Q}(\Phi(X_j))) - m((\Phi(X_0))([\omega]) - \underline{Q}(\Phi(X_0))) \right] \geq 0, \end{aligned}$$

so dass \underline{P} kohärent ist. ■

Bemerkung 3.8.16. Mithilfe der obigen Konstruktion kann auch gezeigt werden, dass eine kohärente Prävision $\underline{P} : 2^\Omega \subseteq \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ wesentliche Domäne 2^Ω besitzt, wenn für alle Ununterscheidbarkeitsrelationen, die einen endlichen Faktorraum Ω' erzeugen, die zugehörige kohärente Prävision \underline{Q} wesentliche Domäne $2^{\Omega'}$ besitzt:

Sei $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ beliebig. Dann ist für alle $\varepsilon > 0$ zu zeigen, dass $n \in \mathbb{N}^+$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\chi_1, \dots, \chi_n \in 2^\Omega$ mit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq X$$

und

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(\chi_i) + \lambda_0 \geq \underline{P}^\diamond(X) - \varepsilon$$

existieren.

Sei also $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein einfaches Spiel $\tilde{X} \leq X$ mit $\|X - \tilde{X}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Betrachte nun die durch die Menge $M = \{\tilde{X}\}$ erzeugte Ununterscheidbarkeitsrelation. Da \tilde{X} einfach ist ist Ω' endlich und die der Prävision \underline{P}^\diamond zugeordnete Prävision \underline{Q} besitzt nach Voraussetzung wesentliche Domäne $2^{\Omega'}$, d.h., es existieren $n \in \mathbb{N}^+$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\chi_1, \dots, \chi_n \in 2^\Omega$ mit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi(\chi_i) + \lambda_0 \leq \Phi(\tilde{X})$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i + \lambda_0 \leq \tilde{X} \leq X$$

und

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{Q}(\Phi(\chi_i)) + \lambda_0 \geq \underline{Q}^\diamond(\Phi(\tilde{X})) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit $|\underline{P}^\diamond(X) - \underline{P}^\diamond(\tilde{X})| \leq \|X - \tilde{X}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ folgt schließlich:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(\chi_i) + \lambda_0 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}^\diamond(\chi_i) + \lambda_0 \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i Q(\Phi(\chi_i)) + \lambda_0 \\
&\geq Q^\diamond(\Phi(\tilde{X})) - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= Q(\Phi(\tilde{X})) - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \underline{P}^\diamond(\tilde{X}) + (\underline{P}^\diamond(X) - \underline{P}^\diamond(\tilde{X})) - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\geq \underline{P}^\diamond(X).
\end{aligned}$$

3.9. Beispiele von Kernen kohärenter Prävisionen

Im Folgenden werden wir die Kerne der Prävisionen aus den Beispielen 1 bis 6 illustrieren. Wir benutzen dazu ein 3-dimensionales Koordinatensystem, in dem für ein $p \in \mathcal{M}(\underline{P})$ die Werte $x := p(\{\omega_1\}), y := p(\{\omega_2\}), z := p(\{\omega_3\})$ dargestellt werden (der Wert $p(\{\omega_4\})$ ergibt sich dann automatisch als $p(\{\omega_4\}) = 1 - p(\{\omega_1\}) - p(\{\omega_2\}) - p(\{\omega_3\})$, so dass wir Vektoren der Form $(p(\{\omega_1\}), p(\{\omega_2\}), p(\{\omega_3\}), p(\{\omega_4\}))$ mit Vektoren der Form (x, y, z) identifizieren).

Beispiel 1. Zunächst gilt $\mathcal{M}(\underline{P}_1) = (\mathcal{M} \circ \mathcal{P})(M_1) = \overline{\text{co}}(M_1) \subseteq [0, 1]^3$. Wegen $p(\omega_2) = p(\omega_3)$ liegt die Menge M_1 und damit auch der Abschluss ihrer konvexen Hülle in der Ebene $y = z$. Mit $x = \theta^2 \geq 0$ folgt $\theta = \sqrt{x}$ und somit $y = z = \sqrt{x} - x$ für alle $p \in M_1$. Da y bzw. z als Funktion von x strikt konkav ist und da die Punkte $(0, 0, 0)$ und $(1, 0, 0)$ aus M_1 sind lässt sich der Kern von \underline{P}_1 als

$$\mathcal{M}(\underline{P}_1) = \overline{\text{co}}(M_1) = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 \mid y = z \ \& \ y \leq \sqrt{x} - x\}$$

darstellen. Beachte, dass der Abschluss der konvexen Hülle eigentlich im \mathbb{R}^4 gebildet werden muß, dieser stimmt aber mit dem hier im \mathbb{R}^3 gebildeten Abschluss der konvexen Hülle überein. Die Extrempunkte von $\mathcal{M}(\underline{P}_1)$ sind dann, wie man auch in Abb.3.1 erkennt, genau die Punkte von M_1 (schwarze Kurve der Form $y = z = \sqrt{x} - x$).

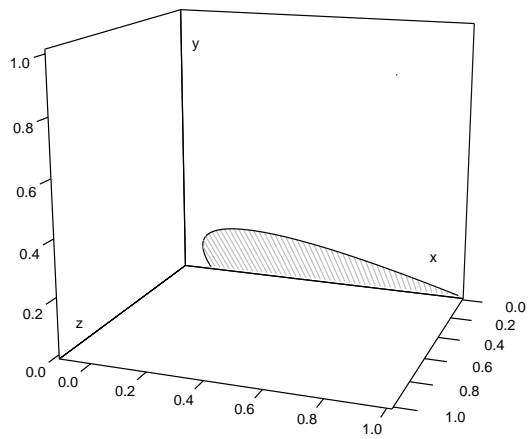


Abbildung 3.1.: Der Kern von P_1

Beispiel 2. Da die Prävision \underline{P}_2 eine endliche Domäne besitzt hat der Kern als Schnitt endlich vieler Halbräume der Form $\{p \in \mathcal{P}(\Omega) | p(X) \geq \underline{P}_2(X)\}$ endlich viele Extrempunkte. Diese lassen sich explizit nach folgendem Algorithmus aus [37] (S.174 bzw. S.511) berechnen:

1. Definiere für alle $Y_1, \dots, Y_k \in \mathcal{K}$ die zugehörigen Marginalspiele

$$X_j = Y_j - \underline{P}(X_j), \quad j = 1, \dots, k$$

und betrachte alle Teilmengen $J \subseteq \{1, \dots, k\}$ der Kardinalität $n - 1$ für die die Spiele $\{X_j | j \in J\}$ und das Spiel $\mathbb{1}_\Omega$ linear unabhängig sind.

2. Für jedes derartige J berechne die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^n p_i \cdot X_j(\omega_i) = 0 \quad (j \in J)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

3. Gilt für $j = 1, \dots, k$

$$\sum_{i=1}^n p_i \cdot X_j,$$

so ist $p = (p_1, \dots, p_n)$ ein Extrempunkt von $\mathcal{M}(\underline{P})$.

Die 8 Extrempunkte von \underline{P}_2 gibt folgende Tabelle wieder:

p	$p(\{\omega_1\})$	$p(\{\omega_2\})$	$p(\{\omega_3\})$	$p(\{\omega_4\})$
p_1	0	0.25	0.25	0.5
p_2	0	0	0.25	0.75
p_3	0	0.25	0	0.75
p_4	0	0	0	1
p_5	0.75	0	0.25	0
p_6	0.5	0.25	0.25	0
p_7	0.75	0.25	0	0
p_8	1	0	0	0

Tabelle 3.7.: Die Extrempunkte von $\mathcal{M}(\underline{P}_2)$

Abbildung 3.2 zeigt den Kern von \underline{P}_2 mit den 8 Extrempunkten p_1 bis p_8 (schwarz) sowie den ursprünglichen Kern von \underline{P}_1 (grau schraffiert). Es ist klar zu sehen, dass die Einschränkung von \underline{P}_1 auf 2^Ω den Kern größer und damit die zugehörige Prävision uninformativer macht (z.B. gilt $\underline{P}_1((2, 0, 0, 1)) = \min_{\theta \in [0,1]} [2\theta^2 + (1 - \theta)^2] = \frac{2}{3} > 0.5 = \min_{i \in \{1, \dots, 8\}} p_i((2, 0, 0, 1))$). Es ist also nicht immer angemessen ein konvexes Modell p_θ durch die ihr zugeordnete Prävision auf 2^Ω zu beschreiben. Dies zeigt, dass das Konzept einer unteren Prävision allgemeiner ist als das einer unteren Wahrscheinlichkeit. Weiterhin zeigen Beispiel 1 und Beispiel 2, dass eine kohärente Prävision \underline{P} im Allgemeinen nicht durch Angabe von \underline{P} auf 2^Ω eindeutig definiert ist.

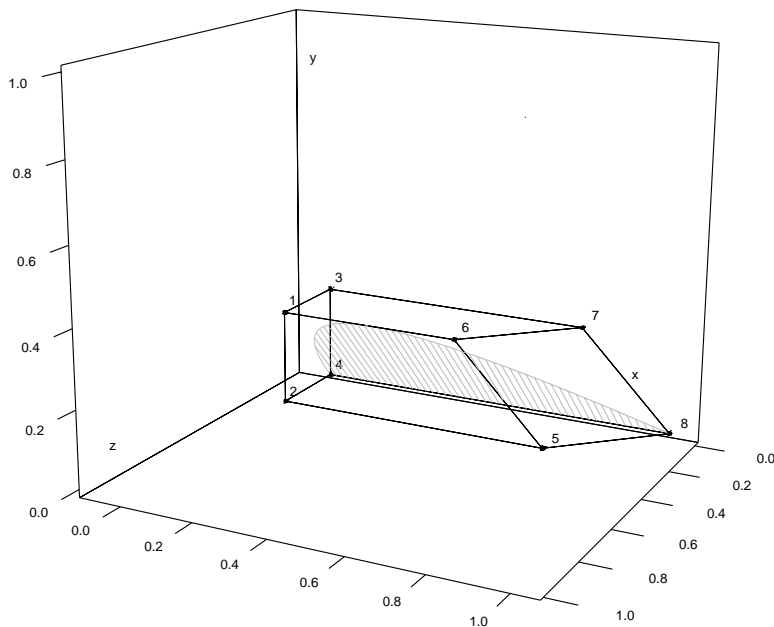


Abbildung 3.2.: Der Kern von \underline{P}_2

Beispiel 3. Wird \underline{P}_1 nur auf die Domäne \mathbb{N}_2^Ω eingeschränkt, so ist der zugehörige Kern kleiner als der von \underline{P}_2 und größer als der von \underline{P}_1 . Aus Tabelle 3.8 ist ersichtlich, dass alle Extrempunkte und damit auch der gesamte Kern von \underline{P}_3 bereits in der Ebene $y = z$ liegen. Abbildung 3.3 zeigt die Kerne $\mathcal{M}(\underline{P}_3)$ und $\mathcal{M}(\underline{P}_1)$, die kaum noch voneinander zu unterscheiden sind. Dennoch sind \underline{P}_3 und \underline{P}_1 voneinander verschieden. Es gilt sogar für jede endliche Domäne \mathcal{K} die Ungleichheit von $\underline{Q} := (\underline{P}_1|_{\mathcal{K}})^\diamond$ und \underline{P}_1 , denn der Kern von \underline{Q} hat als Schnitt endlich vieler Halbräume auch nur endlich viele Extrempunkte, der Kern von \underline{P}_1 hat jedoch unendlich viele Extrempunkte (siehe Abbildung 3.1). Das heißt, die beiden Kerne sind verschieden, also gilt $\mathcal{M}(\underline{P}_1) \subsetneq \mathcal{M}(\underline{Q})$, d.h. es existiert ein $q \in \mathcal{M}(\underline{Q}) \setminus \mathcal{M}(\underline{P}_1)$, das von der konvexen, schwach*-kompakten Menge $\mathcal{M}(\underline{P}_1)$ durch ein lineares, schwach*-stetiges Funktional, also ein Auswertungsfunktional X strikt getrennt werden kann, d.h., es gilt

$$\underline{P}_1(X) = \min_{p \in \mathcal{M}(\underline{P}_1)} p(X) = \min_{p \in \mathcal{M}(\underline{P}_1)} X(p) > X(q) = q(X) \geq \underline{Q}(X),$$

so dass \underline{P}_1 und \underline{Q} wirklich verschieden sind.

p	$p(\{\omega_1\})$	$p(\{\omega_2\})$	$p(\{\omega_3\})$	$p(\{\omega_4\})$
p_1	0.5	0.2083	0.2083	0.0833
p_2	0.3333	0.25	0.25	0.1667
p_3	0.75	0.125	0.125	0
p_4	1	0	0	0
p_5	0.0833	0.2083	0.2083	0.5
p_6	0.1667	0.25	0.25	0.3333
p_7	0	0.125	0.125	0.75
p_8	0	0	0	1

Tabelle 3.8.: die Extrempunkte von $\mathcal{M}(\underline{P}_3)$

Dieses Beispiel zeigt auch, dass die p_σ^* aus Definition 3.8.5 nicht alle Extrempunkte des Kerns von \underline{P}_3 sind, denn z.B. für den Extrempunkt p_1 und beliebiges p_σ gilt:

$$0 < p_1(K_{\sigma(1)}) \neq p_\sigma^*(K_{\sigma(1)}) = \underline{P}_3(K_{\sigma(1)}) = 0.$$

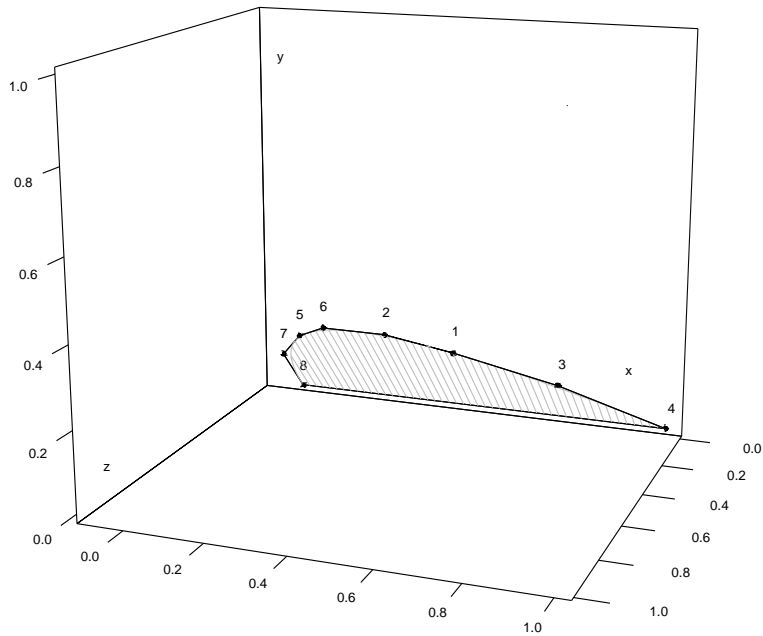


Abbildung 3.3.: Der Kern von \underline{P}_3 und \underline{P}_1

Beispiel 4. Die Extrempunkte des Kernes von $\underline{P}_4|_{2^\Omega}$ sind genau die ursprünglichen Punkte $p_1 = (0.5, 0, 0, 0.5)$ und $p_2 = (0, 0.5, 0.5, 0)$. Das heißt, dass \underline{P}_4 wesentliche Domäne 2^Ω besitzt, denn es gilt:

$$(\underline{P}_4|_{2^\Omega})^\diamond = (\mathcal{P} \circ \mathcal{M})(\underline{P}_4|_{2^\Omega}) = \mathcal{P}(\text{ext}(\mathcal{M}(\underline{P}_4|_{2^\Omega}))) = \mathcal{P}(\{p_1, p_2\}) = \underline{P}_4.$$

Der Kern von \underline{P}_4 (bzw. $\underline{P}_4|_{2^\Omega}$) ist folglich durch $\mathcal{M}(\underline{P}_4) = \overline{\text{co}}(\{p_1, p_2\}) = M_4$ gegeben:

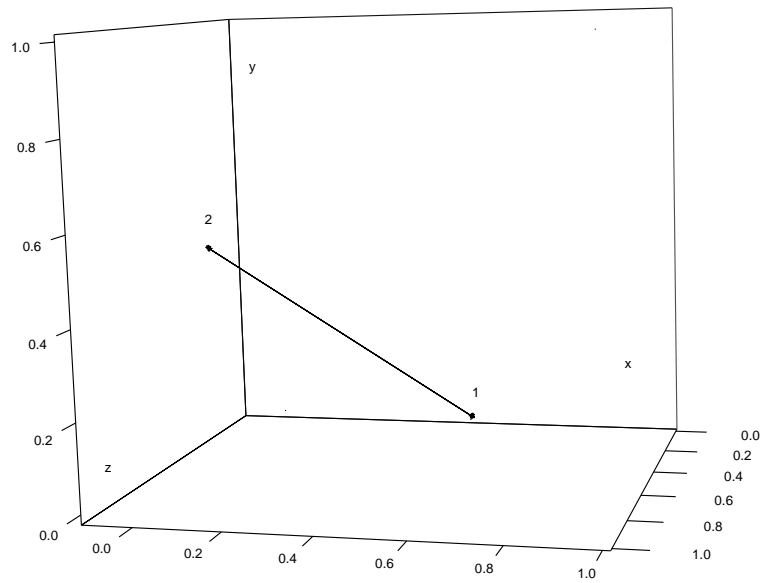


Abbildung 3.4.: Der Kern von \underline{P}_4

Beispiel 5. Da M_5 konvex und abgeschlossen ist, ist M_5 bereits der Kern von \underline{P}_4 :

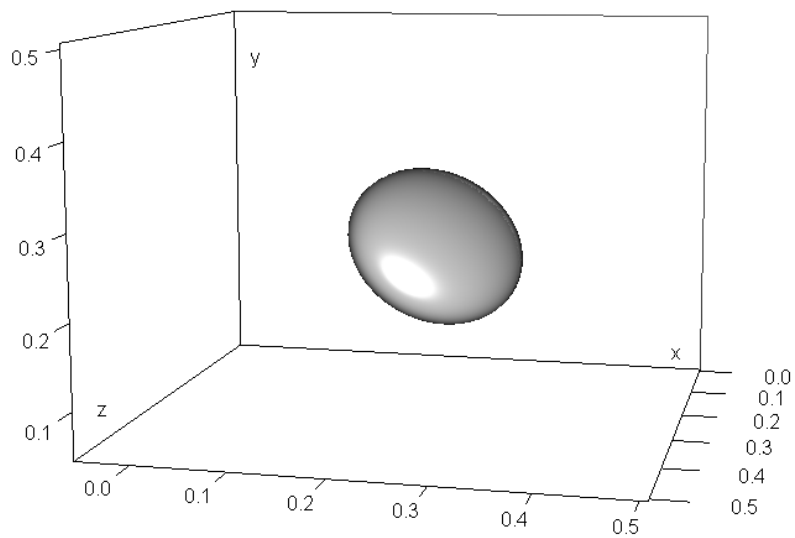


Abbildung 3.5.: Der Kern von \underline{P}_5

Wenn \underline{P}_5 auf 2^Ω , \mathbb{N}_2^Ω bzw. \mathbb{N}_2^Ω eingeschränkt wird wird der Kern größer und besitzt endlich viele (nämlich 24, 96 bzw. 288) Extrempunkte:

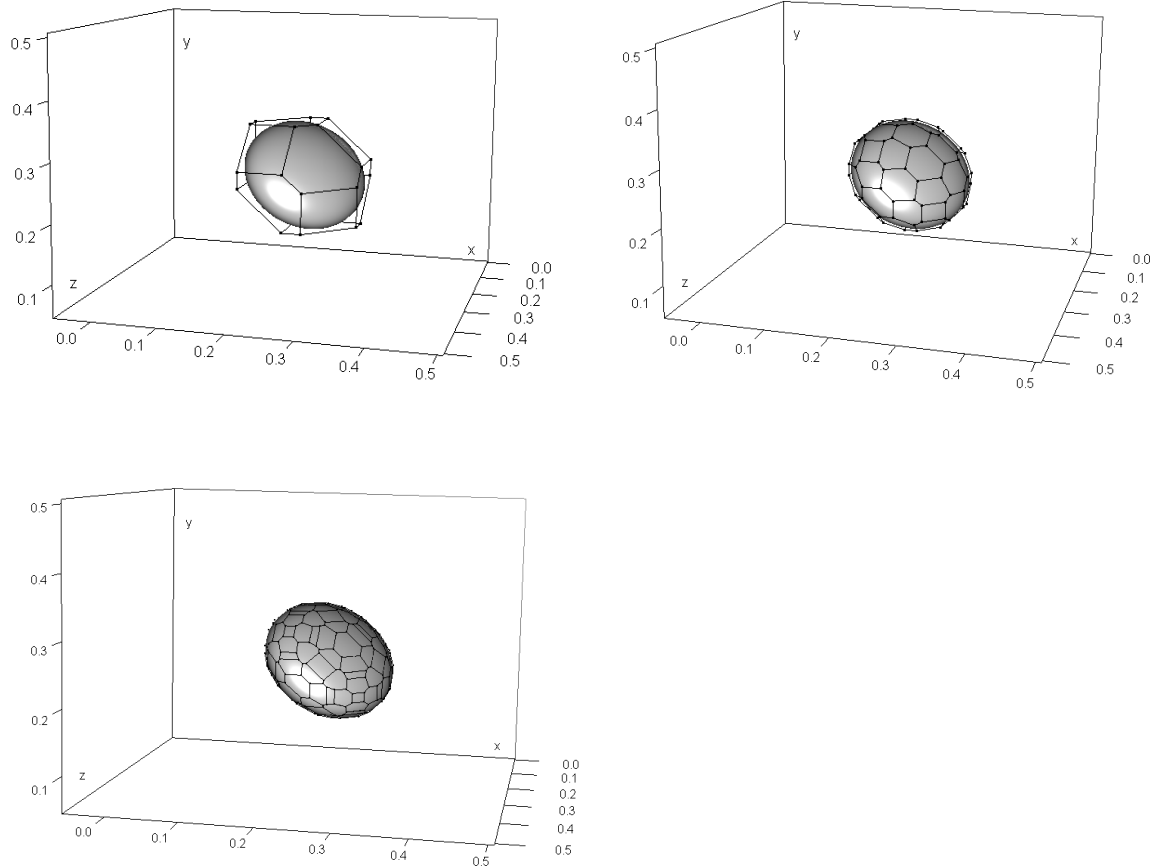


Abbildung 3.6.: Der Kern von \underline{P}_5 eingeschränkt auf 2^Ω , \mathbb{N}_2^Ω bzw. \mathbb{N}_3^Ω mit 24, 96 bzw. 288 Extrempunkten (schwarz), sowie der ursprüngliche Kern von \underline{P}_4 (grau)

Es ist zu sehen, dass \underline{P}_5 symmetrisch bezüglich x , y und z ist, was auch aus der Konstruktion von \underline{P}_5 ableitbar ist.

Beispiel 6. Die Prävision \underline{P}_6 bzw. ihr Kern ist auch wieder symmetrisch bezüglich x, y und z :

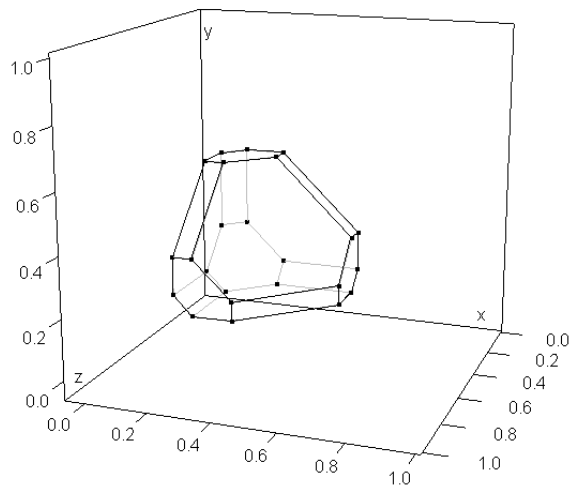


Abbildung 3.7.: Der Kern von \underline{P}_6

p	$p(\{\omega_1\})$	$p(\{\omega_2\})$	$p(\{\omega_3\})$	$p(\{\omega_4\})$
p_1	0.0667	0.1333	0.2667	0.5333
p_2	0.0667	0.1333	0.5333	0.2667
p_3	0.0667	0.2667	0.1333	0.5333
p_4	0.0667	0.5333	0.1333	0.2667
p_5	0.0667	0.2667	0.5333	0.1333
p_6	0.0667	0.5333	0.2667	0.1333
p_7	0.1333	0.0667	0.2667	0.5333
p_8	0.1333	0.0667	0.5333	0.2667
p_9	0.2667	0.0667	0.1333	0.5333
p_{10}	0.5333	0.0667	0.1333	0.2667
p_{11}	0.2667	0.0667	0.5333	0.1333
p_{12}	0.5333	0.0667	0.2667	0.1333
p_{13}	0.1333	0.2667	0.0667	0.5333
p_{14}	0.1333	0.5333	0.0667	0.2667
p_{15}	0.2667	0.1333	0.0667	0.5333
p_{16}	0.5333	0.1333	0.0667	0.2667
p_{17}	0.2667	0.5333	0.0667	0.1333
p_{18}	0.5333	0.2667	0.0667	0.1333
p_{19}	0.1333	0.2667	0.5333	0.0667
p_{20}	0.1333	0.5333	0.2667	0.0667
p_{21}	0.2667	0.1333	0.5333	0.0667
p_{22}	0.5333	0.1333	0.2667	0.0667
p_{23}	0.2667	0.5333	0.1333	0.0667
p_{24}	0.5333	0.2667	0.1333	0.0667

Tabelle 3.9.: Die Extrempunkte von $\mathcal{M}(P_6)$

Definition 3.9.1. Sei Ω endlich oder unendlich. Eine Prävision $\underline{P} : \mathcal{L}(\Omega) \supseteq \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt komonoton additiv auf $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$, falls für beliebiges $n \in \mathbb{N}^+$ und beliebige komonotone $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{K}'$ mit $X_1 + X_2 + \dots + X_n \in \mathcal{K}$ gilt:

$$\underline{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \underline{P}(X_1) + \underline{P}(X_2) + \dots + \underline{P}(X_n).$$

Bemerkung 3.9.2. Gilt für eine Prävision über $\mathcal{L}(\Omega)$ und beliebige komonotone $X, Y \in \mathcal{L}(\Omega)$ die Gleichheit $\underline{P}(X + Y) = \underline{P}(X) + \underline{P}(Y)$, so ist \underline{P} bereits komonoton additiv auf $\mathcal{L}(\Omega)$: Für komonotone $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{L}(\Omega)$ gilt:

$$\underline{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \underline{P}(X_1) + \underline{P}(X_2) + \dots + \underline{P}(X_n),$$

denn für beliebiges $1 \leq k \leq n-1$ sind die Spiele $X := X_1 + X_2 + \dots + X_k$ und X_{k+1} komonoton: Für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ mit $X(\omega_1) < X(\omega_2)$ existiert ein X_l mit $X_l(\omega_1) < X_l(\omega_2)$ und daraus folgt $X_{k+1}(\omega_1) \leq X_{k+1}(\omega_2)$. Falls andersherum $X_{k+1}(\omega_1) < X_{k+1}(\omega_2)$ gilt, folgt für alle $l = 1, \dots, n$ die Ungleichung $X_l(\omega_1) \leq X_l(\omega_2)$ und somit folgt $X(\omega_1) \leq X(\omega_2)$. Insgesamt gilt also:

$$\begin{aligned} \underline{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) &= \underline{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}) + \underline{P}(X_n) \\ &= \underline{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_{n-2}) + \underline{P}(X_{n-1}) + \underline{P}(X_n) \\ &= \underline{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_{n-3}) + \underline{P}(X_{n-2}) + \underline{P}(X_{n-1}) + \underline{P}(X_n) \\ &\vdots \\ &= \underline{P}(X_1) + \underline{P}(X_2) + \dots + \underline{P}(X_n). \end{aligned}$$

Weiterhin ist eine kohärente Prävision \underline{P} bereits komonoton additiv auf $\mathcal{L}(\Omega)$ falls sie komonoton additiv auf 2^Ω ist: Seien $X, Y \in \mathcal{L}(\Omega)$ zunächst zwei einfache komonotone Spiele. Seien weiter x_0, x_1, \dots, x_n die aufsteigend geordneten Elemente der Menge $\text{Im}(X) \cup \text{Im}(Y)$, sowie $\lambda_0 = x_0, \lambda_{i+1} = x_{i+1} - x_i, i = 1, \dots, n-1$. Dann gilt

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i S_{x_i}(X) + \lambda_0$$

und

$$Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i S_{x_i}(Y) + \lambda_0$$

mit komonotonen $S_{x_i}(X)$ und $S_{x_i}(Y)$ (siehe Lemma 3.1.12). Nach Voraussetzung gilt

$$\underline{P}\left(\sum_{i=1}^n S_{x_i}(X) + S_{x_i}(Y)\right) = \sum_{i=1}^n \underline{P}(S_{x_i}(X)) + \underline{P}(S_{x_i}(Y))$$

bzw.

$$\underline{P}\left(\sum_{i=1}^n S_{x_i}(X)\right) = \sum_{i=1}^n \underline{P}(S_{x_i}(X))$$

und

$$\underline{P}\left(\sum_{i=1}^n S_{x_i}(Y)\right) = \sum_{i=1}^n \underline{P}(S_{x_i}(Y)).$$

Mit Lemma 3.2.15 (t) folgt $(\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0)$:

$$\begin{aligned} \underline{P}(X + Y) &= \underline{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i S_{x_i}(X) + \lambda_i S_{x_i}(Y) + \lambda_0 + \lambda_0\right) \\ &= \underline{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i S_{x_i}(X) + \lambda_i S_{x_i}(Y)\right) + \lambda_0 + \lambda_0 \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{P}(S_{x_i}(X)) + \lambda_i \underline{P}(S_{x_i}(Y)) + \lambda_0 + \lambda_0 \\ &= \underline{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i S_{x_i}(X) + \lambda_0\right) + \underline{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i S_{x_i}(Y) + \lambda_0\right) \\ &= \underline{P}(X) + \underline{P}(Y). \end{aligned}$$

Für beliebige Spiele X, Y existieren nach Lemma 3.1.8 Folgen X_n, Y_n mit $X_n \rightarrow X$ und $Y_n \rightarrow Y$. Die Summe $X_n + Y_n$ konvergiert dann gegen $X + Y$ und es folgt mit der Stetigkeit von \underline{P} (siehe Lemma 3.2.15 (i)):

$$\underline{P}(X_n + Y_n) = \underline{P}(X_n) + \underline{P}(Y_n) \rightarrow \underline{P}(X) + \underline{P}(Y)$$

und andererseits

$$\underline{P}(X_n + Y_n) \rightarrow \underline{P}(X + Y)$$

, so dass $\underline{P}(X + Y) = \underline{P}(X) + \underline{P}(Y)$ gilt.

3.10. Fortsetzung von unteren Wahrscheinlichkeiten

Satz 3.10.1. Sei Ω endlich oder unendlich. Die natürliche Extension \underline{P}° einer kohärenten unteren Wahrscheinlichkeit $\underline{P} : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist k -monoton falls \underline{P} k -monoton ist.

Beweis: Sei zunächst Ω endlich. Dann ist \underline{P}° komonoton additiv auf 2^Ω :

Seien $X_1, X_2, \dots, X_n \in 2^\Omega$ komonoton. Das heißt aber, dass X_1, \dots, X_n eine Kette in 2^Ω bilden. Erweitere diese Kette zu einer maximalen Kette K und betrachte das zugehörige p_σ , welches nach Lemma 3.8.13 zulässig bezüglich \underline{P} , also auch zulässig bezüglich \underline{P}° ist, denn \underline{P} ist als k -monotone Abbildung insbesondere supermodular. Mit p_σ folgt:

$$\begin{aligned} \underline{P}^\circ(X_1) + \underline{P}^\circ(X_2) + \dots + \underline{P}^\circ(X_n) &= p_\sigma(X_1) + p_\sigma(X_2) + \dots + p_\sigma(X_n) \\ &= p_\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &\geq \underline{P}^\circ(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &\geq \underline{P}^\circ(X_1) + \underline{P}^\circ(X_2) + \dots + \underline{P}^\circ(X_n), \end{aligned}$$

d.h., \underline{P}° ist komonoton additiv auf 2^Ω . Für unendliches Ω und einfache Spiele X_1, \dots, X_n betrachte die Konstruktion aus dem Beweis von Lemma 3.8.15: Für $M = \{X_1, \dots, X_n\}$ ist die \underline{P}° zugeordnete Prävision Q ebenfalls k -monoton und kohärent. Da der Grundraum Ω' hier endlich ist folgt nach dem oben gezeigten:

$$\begin{aligned} \underline{P}^\circ(X_1) + \dots + \underline{P}^\circ(X_n) &= Q(\Phi(X_1)) + \dots + Q(\Phi(X_n)) \\ &= Q(\Phi(X_1) + \dots + \Phi(X_n)) \\ &= \underline{P}^\circ(X_1 + \dots + X_n). \end{aligned}$$

Für beliebige Spiele X_1, X_2, \dots, X_n existieren Folgen $X_1^l, X_2^l, \dots, X_n^l$ von einfachen Spielen mit

$$X_i^l \rightarrow X_i \quad \text{für } l \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, n$$

und es folgt aus

$$X_1^l + \dots + X_n^l \rightarrow X_1 + \dots + X_n \quad \text{für } l \rightarrow \infty$$

und der Stetigkeit von \underline{P}° :

$$\begin{aligned} \underline{P}^\circ(X_1) + \dots + \underline{P}^\circ(X_n) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \underline{P}^\circ(X_1^l) + \dots + \lim_{l \rightarrow \infty} \underline{P}^\circ(X_n^l) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} [\underline{P}^\circ(X_1^l) + \dots + \underline{P}^\circ(X_n^l)] \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} [\underline{P}^\circ(X_1^l + \dots + X_n^l)] \\ &= \underline{P}^\circ(X_1 + \dots + X_n), \end{aligned}$$

d.h., \underline{P}^\diamond ist sowohl für endliches als auch für unendliches Ω komonoton additiv auf 2^Ω .
Seien jetzt $k \geq 2$ und X_1, X_2, \dots, X_k einfache Spiele und Ω beliebig. Seien weiter $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ die aufsteigend geordneten Elemente der Menge

$$I := \bigcup_{i=1}^n \text{Im}(X_i).$$

Es gilt dann $I \supseteq \text{Im}(\bigwedge_{i \in T} X_i)$ für alle $T \subseteq \{1, \dots, k\}$ und $I \supseteq \text{Im}(\bigvee_{i=1}^k X_i)$. Seien weiter $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ definiert durch

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= x_0, \\ \lambda_{l+1} &= x_{l+1} - x_l, \quad l = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \underline{P}^\diamond\left(\bigvee_{i=1}^k X_i\right) &= \underline{P}^\diamond\left(\sum_{l=1}^n \lambda_l S_{x_l}\left(\bigvee_{i=1}^k X_i\right) + \lambda_0\right) \\ &= \sum_{l=1}^n \lambda_l \underline{P}^\diamond\left(\bigvee_{i=1}^k S_{x_l}(X_i)\right) + \lambda_0 \\ &= \sum_{l=1}^n \lambda_l \underline{P}\left(\bigvee_{i=1}^k S_{x_l}(X_i)\right) + \lambda_0 \\ &\geq \sum_{l=1}^n \lambda_l \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|T|+1} \underline{P}\left(\bigwedge_{i \in T} S_{x_l}(X_i)\right) + \lambda_0 \\ &= \sum_{l=1}^n \lambda_l \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|T|+1} \underline{P}^\diamond\left(\bigwedge_{i \in T} S_{x_l}(X_i)\right) + \lambda_0 \\ &= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, n\}} [(-1)^{|T|+1} \sum_{l=1}^n \lambda_l \underline{P}^\diamond(S_{x_l}(\bigwedge_{i \in T} X_i)) + \lambda_0] \\ &= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, n\}} [(-1)^{|T|+1} \sum_{l=1}^n \underline{P}^\diamond(\lambda_l S_{x_l}(\bigwedge_{i \in T} X_i) + \lambda_0)] \\ &= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, n\}} [(-1)^{|T|+1} \underline{P}^\diamond(\sum_{l=1}^n \lambda_l S_{x_l}(\bigwedge_{i \in T} X_i) + \lambda_0)] \\ &= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|T|+1} \underline{P}^\diamond\left(\bigwedge_{i \in T} X_i\right). \end{aligned}$$

Beachte hier, dass die $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nichtnegativ sind und dass mit dem binomischen Lehrsatz

$$\sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|T|+1} \lambda_0 = [\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \mp \dots \pm \binom{n}{n}] \lambda_0 = (0 + 1) \lambda_0 = \lambda_0 \text{ gilt.}$$

Für beliebige Spiele X_1, X_2, \dots, X_n existieren Folgen $X_1^n, X_2^n, \dots, X_k^n$ von einfachen Spielen mit

$$X_i^n \rightarrow X_i \text{ für } n \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, k$$

und es folgt

$$\bigvee_{i=1}^k X_i^n \rightarrow \bigvee_{i=1}^k X_i \quad \text{bzw.} \quad \underline{P}^\diamond(\bigvee_{i=1}^k X_i^n) \rightarrow \underline{P}^\diamond(\bigvee_{i=1}^k X_i)$$

und

$$\bigwedge_{i \in T} X_i^n \rightarrow \bigwedge_{i \in T} X_i \quad \text{bzw.} \quad \underline{P}^\diamond(\bigwedge_{i \in T} X_i^n) \rightarrow \underline{P}^\diamond(\bigwedge_{i \in T} X_i)$$

für $\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}$ und aus der Ungleichung

$$\underline{P}^\diamond(\bigvee_{i=1}^k X_i^n) \geq \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \underline{P}^\diamond(\bigwedge_{i \in T} X_i^n)$$

folgt durch Grenzübergang die Behauptung

$$\underline{P}^\diamond(\bigvee_{i=1}^k X_i) \geq \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|T|+1} \underline{P}^\diamond(\bigwedge_{i \in T} X_i).$$

■

Korollar 3.10.1. Die natürliche Extension einer Belief-Funktion ist eine verallgemeinerte Belief-Funktion.

Bemerkung 3.10.2. Nicht jede monotone und k -monotone untere Prävision \underline{P} ist kohärent und die natürliche Extension von \underline{P} , falls sie überhaupt existiert, ist nicht immer k -monoton: Betrachte den Multimengenverband \mathbb{N}_2^Ω mit vierelementiger Grundmenge Ω und die verallgemeinerte Belief-Funktion \underline{P} , die durch das basic probability assignment m mit

$$\begin{aligned} m(Y_{11}) &= m(Y_{40}) = \frac{3}{6} \\ m(Y_{46}) &= m(Y_{63}) = m(Y_{77}) = \frac{2}{6} \end{aligned}$$

und $m(Y) = 0$ für alle restlichen Y aus \mathbb{N}_2^Ω gegeben ist. Dann ist \underline{P} nach Konstruktion eine verallgemeinerte Belief-Funktion aber ihre natürliche Extension ist keine verallgemeinerte Belief-Funktion mehr, denn ihre Möbiusinverse m^* ist z.B. für $Y_{38} = (1, 1, 0, 1)$ negativ:

Y	$Y(\omega_1)$	$Y(\omega_2)$	$Y(\omega_3)$	$Y(\omega_4)$	$\underline{P}(Y)$	$\mathbf{m}(Y)$	$\underline{P}^\diamond(Y)$	$m^*(Y)$
Y_1	0	0	0	0	0	0	0	0
Y_2	0	0	0	1	0	0	0	0
Y_3	0	0	0	2	0	0	0	0
Y_4	0	0	1	0	0	0	0	0
Y_5	0	0	1	1	0	0	0	0
Y_6	0	0	1	2	0	0	0	0
Y_7	0	0	2	0	0	0	0	0
Y_8	0	0	2	1	0	0	0	0
Y_9	0	0	2	2	0	0	0	0
Y_{10}	0	1	0	0	0	0	2	2
Y_{11}	0	1	0	1	3	3	3	1
Y_{12}	0	1	0	2	3	3	3	0
Y_{13}	0	1	1	0	0	0	2	0
Y_{14}	0	1	1	1	3	3	3	0
Y_{15}	0	1	1	2	3	3	3	0
Y_{16}	0	1	2	0	0	0	2	0
Y_{17}	0	1	2	1	3	3	3	0
Y_{18}	0	1	2	2	3	3	3	0
Y_{19}	0	2	0	0	0	0	4	2
Y_{20}	0	2	0	1	3	3	5	0
Y_{21}	0	2	0	2	3	3	6	1
Y_{22}	0	2	1	0	0	0	4	0
Y_{23}	0	2	1	1	3	3	5	0
Y_{24}	0	2	1	2	3	3	6	0
Y_{25}	0	2	2	0	0	0	4	0
Y_{26}	0	2	2	1	3	3	5	0
Y_{27}	0	2	2	2	3	3	6	0
Y_{28}	1	0	0	0	0	0	0	0
Y_{29}	1	0	0	1	0	0	0	0
Y_{30}	1	0	0	2	0	0	0	0
Y_{31}	1	0	1	0	0	0	0	0
Y_{32}	1	0	1	1	0	0	2	2
Y_{33}	1	0	1	2	0	0	2	0
Y_{34}	1	0	2	0	0	0	0	0
Y_{35}	1	0	2	1	0	0	2	0
Y_{36}	1	0	2	2	0	0	2	0
Y_{37}	1	1	0	0	0	0	4	2

Y	$Y(\omega_1)$	$Y(\omega_2)$	$Y(\omega_3)$	$Y(\omega_4)$	$\underline{P}(Y)$	$m(Y)$	$\underline{P}^\diamond(Y)$	$m^*(Y)$
Y_{38}	1	1	0	1	$\frac{3}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{-1}{6}$
Y_{39}	1	1	0	2	$\frac{3}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{40}	1	1	1	0	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{41}	1	1	1	1	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{42}	1	1	1	2	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{43}	1	1	2	0	$\frac{3}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{44}	1	1	2	1	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{45}	1	1	2	2	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{46}	1	2	0	0	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{47}	1	2	0	1	$\frac{3}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{-1}{6}$
Y_{48}	1	2	0	2	$\frac{3}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{-1}{6}$
Y_{49}	1	2	1	0	$\frac{3}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{50}	1	2	1	1	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{-1}{6}$
Y_{51}	1	2	1	2	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{-1}{6}$
Y_{52}	1	2	2	0	$\frac{3}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{53}	1	2	2	1	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{54}	1	2	2	2	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{55}	2	0	0	0	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{56}	2	0	0	1	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{57}	2	0	0	2	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{58}	2	0	1	0	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{59}	2	0	1	1	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{60}	2	0	1	2	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{61}	2	0	2	0	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{62}	2	0	2	1	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{63}	2	0	2	2	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$
Y_{64}	2	1	0	0	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{65}	2	1	0	1	$\frac{3}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{66}	2	1	0	2	$\frac{3}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{67}	2	1	1	0	$\frac{3}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{68}	2	1	1	1	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{69}	2	1	1	2	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{70}	2	1	2	0	$\frac{3}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{71}	2	1	2	1	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{72}	2	1	2	2	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{73}	2	2	0	0	$\frac{2}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{-1}{6}$
Y_{74}	2	2	0	1	$\frac{3}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{-1}{6}$
Y_{75}	2	2	0	2	$\frac{3}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{-1}{6}$

Y	$Y(\omega_1)$	$Y(\omega_2)$	$Y(\omega_3)$	$Y(\omega_4)$	$\underline{P}(Y)$	$m(Y)$	$\underline{P}^\diamond(Y)$	$m^*(Y)$
Y_{76}	2	2	1	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{77}	2	2	1	1	$\frac{10}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{1}{6}$
Y_{78}	2	2	1	2	$\frac{10}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{-1}{6}$
Y_{79}	2	2	2	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{80}	2	2	2	1	$\frac{10}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{0}{6}$
Y_{81}	2	2	2	2	$\frac{12}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{0}{6}$

Tabelle 3.10.: Die natürliche Extension der verallgemeinerten Belief-Funktion \underline{P} ist keine verallgemeinerte Belief-Funktion.

Die natürliche Extension \underline{P}^\diamond ist nichteinmal supermodular, denn mit $Y_{11} = (0, 1, 0, 1)$ und $Y_{37} = (1, 1, 0, 0)$ folgt:

$$\begin{aligned}
\underline{P}^\diamond(Y_{11}) + \underline{P}^\diamond(Y_{37}) &= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6} \\
&> \frac{6}{6} = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \\
&= \underline{P}^\diamond(Y_{10}) + \underline{P}^\diamond(Y_{38}) \\
&= \underline{P}^\diamond(Y_{11} \wedge Y_{37}) + \underline{P}^\diamond(Y_{11} \vee Y_{37}).
\end{aligned}$$

Es stellt sich heraus, dass die unteren Prävisionen über $\mathcal{L}(\Omega)$, die sowohl k -monoton als auch kohärent sind, genau die natürlichen Extensionen von k -monotonen unteren Wahrscheinlichkeiten, also die kohärenten unteren Prävisionen mit wesentlicher Domäne 2^Ω sind:

Satz 3.10.3. Sei $\underline{P} : \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ eine kohärente untere Prävision. Dann sind äquivalent:

- (a) \underline{P} ist supermodular.
- (b) alle p_σ sind zulässig bezüglich \underline{P} .
- (c) \underline{P} ist komonoton additiv auf 2^Ω .
- (d) \underline{P} ist komonoton additiv auf $\mathcal{L}(\Omega)$.
- (e) $\underline{P}|_{2^\Omega}$ ist supermodular und \underline{P} besitzt wesentliche Domäne 2^Ω , d.h. \underline{P} ist die natürliche Extension der supermodularen Prävision $\underline{P}|_{2^\Omega}$.

Beweis:

- „(a) \Rightarrow (b)“ : Dies folgt direkt aus Lemma 3.8.13 (beachte auch Bemerkung 3.2.13).
- „(b) \Rightarrow (c)“ : Dies wurde im Beweis von Lemma 3.10.1 gezeigt.
- „(c) \Rightarrow (d)“ : Das wurde schon in Bemerkung 3.9.2 bewiesen.

- „(d) \Rightarrow (e)“ : Sei $Q := \underline{P}|_{2^\Omega}$. Für Mengen $A, B \in 2^\Omega$ sind die Mengen $A \cup B$ und $A \cap B$ komonoton und es folgt $Q(A) + Q(B) \leq Q(A + B) = Q(A \cup B + A \cap B) = Q(A \cup B) + Q(A \cap B)$, d.h. Q ist supermodular. Weiterhin gilt für ein einfaches Spiel X mit Standarddarstellung $X = \sum_{i=0}^n \lambda_i S_{x_i}(X)$ die Relation

$$\begin{aligned}
 \underline{P}^\diamond(X) = \underline{P}(X) &= \underline{P}\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i S_{x_i}(X)\right) \\
 &= \sum_{i=0}^n \lambda_i \underline{P}(S_{x_i}(X)) \\
 &= \sum_{i=0}^n \lambda_i Q(S_{x_i}(X)) \\
 &\leq Q^\diamond(X) \\
 &= (\underline{P}|_{2^\Omega})^\diamond(X) \\
 &\leq \underline{P}^\diamond(X).
 \end{aligned}$$

Für beliebige Spiele folgt die Aussage $Q^\diamond(X) = \underline{P}^\diamond(X)$ aus der Stetigkeit von Q^\diamond und \underline{P}^\diamond .

- „(e) \Rightarrow (a)“ : Das ist genau die Aussage von Lemma 3.10.1. ■

Bemerkung 3.10.4. Für unendliches Ω gilt Satz 3.10.3 analog mit

- (b)' Für alle endlichen Partitionen Ω' von Ω sind die der Prävision Q zugeordneten p_σ zulässig bezüglich Q ,

denn es gilt

- (a) \implies für alle endlichen Partitionen Ω' von Ω ist das entsprechende Q supermodular
 \implies (b)'
 \implies für alle endlichen Partitionen Ω' ist das entsprechende Q komonoton additiv auf $2^{\Omega'}$
 \implies (c)

und für die restlichen Implikationen wurde die Endlichkeit von Ω nicht als Voraussetzung benötigt.

Korollar 3.10.2. Eine kohärente Prävision \underline{P} ist k -monoton genau dann, wenn sie k -monoton auf 2^Ω ist und wesentliche Domäne 2^Ω besitzt.

Satz 3.10.5. Eine kohärente supermodulare Prävision \underline{P} mit Grundraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ besitzt maximal $n!$ Extrempunkte (nämlich die p_σ).

Beweis: Da $Q := \underline{P}|_{2\Omega}$ nach Theorem 3 aus [31] als supermodulare Wahrscheinlichkeit maximal $n!$ Extrempunkte besitzt (, denn die Extrempunkte sind genau die p_σ) besitzt auch $\underline{P} = Q^\diamond$ maximal $n!$ Extrempunkte, denn es gilt $\mathcal{M}(Q) = \mathcal{M}(Q^\diamond) = \mathcal{M}(\underline{P})$. ■

Bemerkung 3.10.6. Es gibt auch kohärente supermodulare (sogar vollständig monotone) Prävisionen, deren Kern genau $n!$ Extrempunkte besitzt, siehe dazu z.B. Example 5.1, S.112 in [21] (hier wird eine obere Prävision konstruiert, betrachte deshalb die dieser Prävision zugeordnete duale Prävision). Erstaunlicherweise besitzen auch allgemein kohärente untere Wahrscheinlichkeiten maximal $n!$ Extrempunkte, dies hat Wallner in [39] gezeigt. Für kohärente Prävisionen gilt dies im Allgemeine jedoch nicht mehr (siehe z.B. Beispiel 1).

3.11. Erzeuger einer unteren Prävision

Um eine Prävision $\underline{P} : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ über einem endlichen Grundraum Ω der Kardinalität n darzustellen bzw. zu speichern kann man für jede Teilmenge $X \subseteq \Omega$ die Bewertung $\underline{P}(X)$ angeben. Da immer $\underline{P}(\emptyset) = 0$ und $\underline{P}(\Omega) = 1$ gilt ist also für die Darstellung von \underline{P} die Angabe von $2^n - 2$ reellen Zahlen erforderlich. Man kann aber auch \underline{P} durch die Angabe der Extrempunkte des Kernes von \underline{P} darstellen. Dazu wären maximal $n! \cdot (n - 1)$ reelle Zahlen nötig, denn Der Kern besitzt maximal $n!$ Extrempunkte, die durch die Angabe von jeweils $n - 1$ Werten gegeben sind. Bezeichne v_1 das Verhältnis benötigter reeller Zahlen der ersten Darstellungsweise zu der maximalen Anzahl benötigter reeller Zahlen der zweiten Darstellungsweise:

$$v_1 := \frac{2^n - 2}{n! \cdot (n - 1)}.$$

Mit der Stirling-Formel

$$\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n}}$$

folgt

$$v_1 = \frac{2^n - 2}{n! \cdot (n - 1)} \leq \frac{2^n - 2}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (n - 1)} \leq \frac{\left(\frac{2e}{n}\right)^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot (n - 1)},$$

so dass v_1 für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Wegen

$$v_1 \leq \frac{\left(\frac{2e}{n}\right)^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot (n - 1)} < c^n$$

für gegebenes $c > 0$ und hinreichend großem n ist diese Konvergenz stärker als jede exponentielle Konvergenz, wie auch die folgende logarithmische Graphik zeigt:

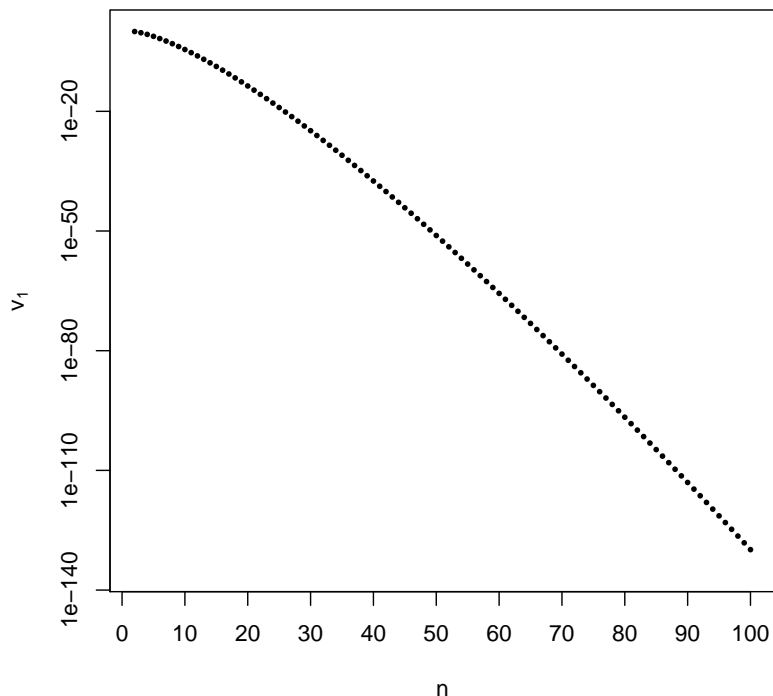


Abbildung 3.8.: Das Verhältnis v_1 in Abhängigkeit von n

Dies bedeutet, dass es für große n im Zweifelsfall nicht sehr effektiv ist \underline{P} durch die Extrempunkte von $\mathcal{M}(\underline{P})$ zu speichern. Andererseits ist es oft hilfreich die Extrempunkte von $\mathcal{M}(\underline{P})$ zu kennen, um z.B. ein konvexes Funktional auf $\mathcal{M}(\underline{P})$ zu minimieren, denn dann wird das Minimum auf einem der Extrempunkte angenommen.

Es stellt sich nun die Frage, ob für eine gegebene Prävision \underline{P} eine echte Teilmenge von $\text{ext}(\mathcal{M}(\underline{P}))$ existiert, die bereits \underline{P} erzeugt:

Definition 3.11.1. Eine Menge $M \subseteq \mathcal{M}(\underline{P})$ heißt Erzeuger von \underline{P} oder auch Prästruktur von \underline{P} , falls für alle $X \in \text{dom}(\underline{P})$

$$(\mathcal{P}(M))(X) = \underline{P}(X)$$

gilt. M heißt minimaler Erzeuger von \underline{P} , falls für alle $N \subsetneq M$ bereits ein $X \in \text{dom}(\underline{P})$ mit

$$(\mathcal{P}(M))(X) \neq (\mathcal{P}(N))(X)$$

existiert.

Für supermodulare (kohärente) Prävisionen ist diese Frage klar zu beantworten. Da wir uns deshalb im Folgenden auf supermodulare Prävisionen beschränken brauchen wir nur die Domäne 2^Ω zu betrachten.

Satz 3.11.2. *Jede supermodulare kohärente Prävision $P : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ über einem endlichen Grundraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ besitzt einen Erzeuger M der Kardinalität*

$$|M| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Beweis: Betrachte den Verband 2^Ω . Dann existiert nach Dilworth's theorem (Satz 3.3.5) und nach Korollar 3.3.2 eine disjunkte Kettenüberdeckung $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ von Ω mit

$$|Z| = m = \text{width}(2^\Omega) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Erweitere nun jede Kette Z_i zu einer maximalen Kette K_i und betrachte die Kettenüberdeckung $K := \{K_1, \dots, K_m\}$. Für eine vierelementige Grundmenge Ω könnte eine derartige Kettenüberdeckung $K = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6\}$ z.B. durch die zugehörigen Permutationen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$ mit

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (\sigma_1(1), \sigma_1(2), \sigma_1(3), \sigma_1(4)) = (1, 2, 3, 4) \\ \sigma_2 &= (3, 1, 2, 4) \\ \sigma_3 &= (1, 4, 2, 3) \\ \sigma_4 &= (2, 3, 4, 1) \\ \sigma_5 &= (4, 2, 3, 1) \\ \sigma_6 &= (3, 4, 1, 2) \end{aligned}$$

gegeben sein:

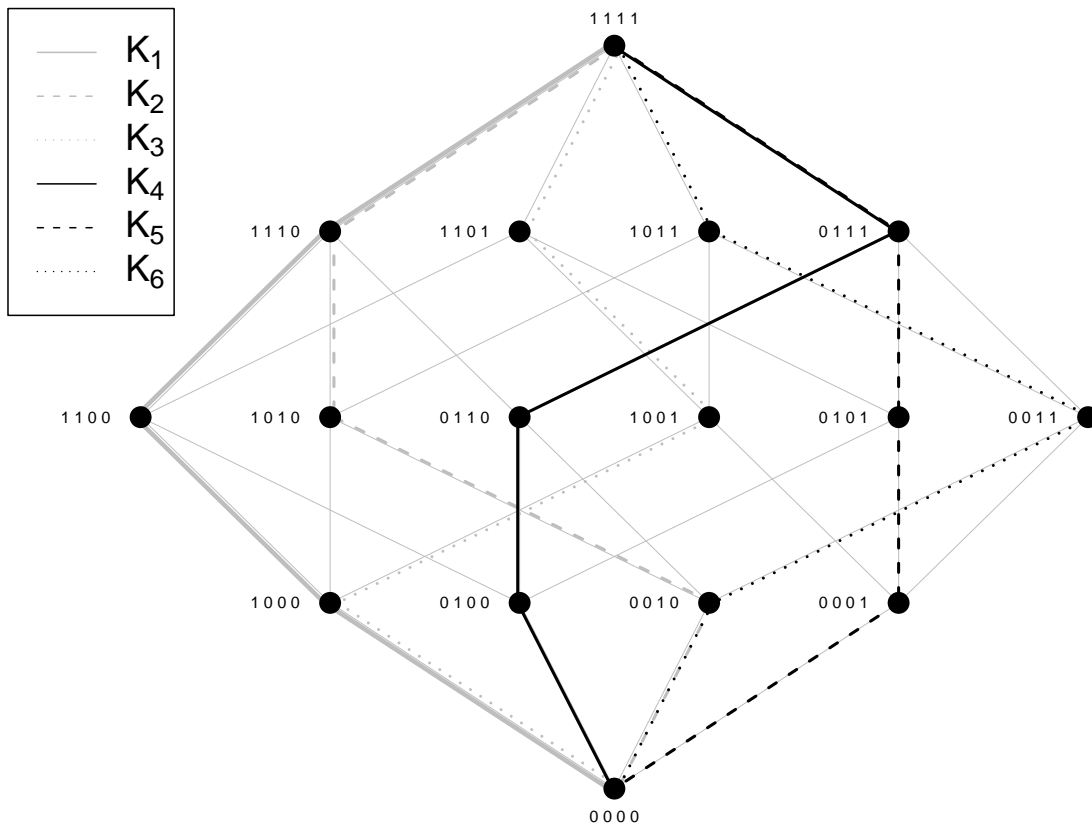


Abbildung 3.9.: Eine mögliche Kettenüberdeckung von 2^Ω mit 6 maximalen Ketten

Da die zugehörigen p_{σ_i} nach Lemma 3.8.13 zulässig bezüglich \underline{P} sind gilt für $M := \{p_{\sigma_1}, \dots, p_{\sigma_m}\}$ die Ungleichung

$$M \subseteq \mathcal{M}(\underline{P})$$

bzw.

$$\mathcal{P}(M) \geq \mathcal{P}(\mathcal{M}(\underline{P})) = (\underline{P})^\diamond = \underline{P},$$

es ist also nur noch die Ungleichung

$$\mathcal{P}(M) \leq \underline{P}$$

zu zeigen. Sei dazu $X \in 2^\Omega$ beliebig. Dann existiert eine Kette $K_i \in K$ mit $X \in K_i$ und es folgt

$$(\mathcal{P}(M))(X) \leq p_{\sigma_i}(X) = \underline{P}(X).$$

■

Angewendet auf Beispiel 6 aus Abschnitt 3.9 würden also z.B. bereits die Extrempunkte $p_1, p_{13}, p_5, p_{10}, p_{22}$ und p_{17} die Prävision \underline{P}_6 erzeugen:

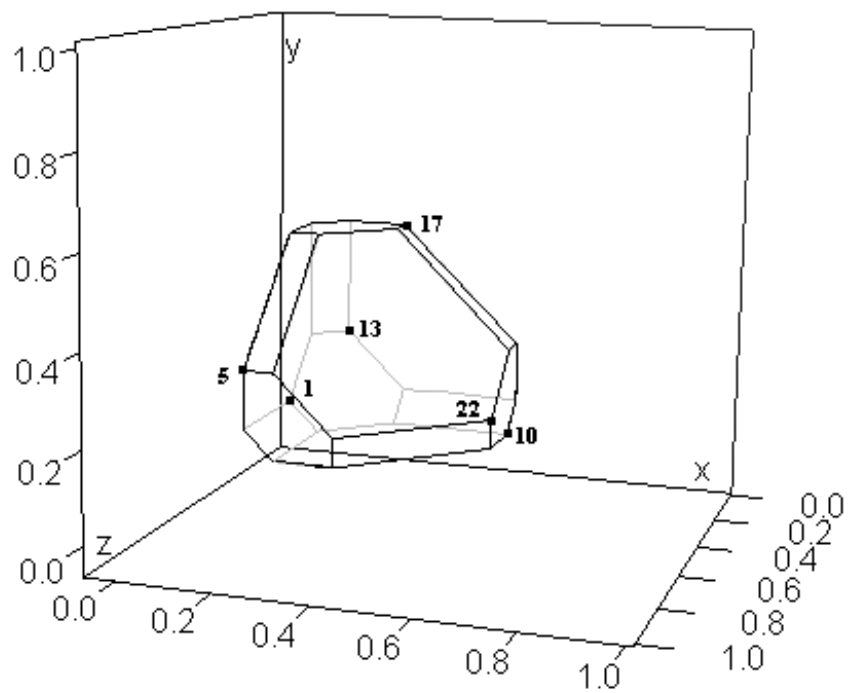


Abbildung 3.10.: Die Extrempunkte $p_1, p_{13}, p_5, p_{10}, p_{22}$ und p_{17} erzeugen bereits \underline{P}_6

Anschaulich gesprochen bedeutet dies insbesondere, dass für jedes $X \in 2^\Omega \setminus \{\emptyset, \Omega\}$ die Hyperebene

$$H_X := \{p \in \mathcal{P}(\Omega) \mid p(X) = \underline{P}_6(X)\}$$

mit mindestens einem der Punkte p_i des Erzeugers

$M := \{p_1, p_{13}, p_5, p_{10}, p_{22}, p_{17}\}$ inzidiert (d.h. $p_i(X) = \underline{P}_6(X)$), so dass der Kern von $\mathcal{P}(M)$ nicht echt kleiner sein kann als der Kern von \underline{P}_6 . Die Minimalität des Erzeugers M ist hier daran zu erkennen, dass für jedes weggelassene p_i mindestens eine Hyperebene H_X existiert, die dann mit keinem der restlichen Extrempunkte mehr inzidiert, so dass der entsprechende Kern $\mathcal{M}(\mathcal{P}(M \setminus \{p_i\}))$ immer echt kleiner als $\mathcal{M}(\underline{P}_6)$ ist. Dass die im Beweis von Satz 3.11.2 konstruierten Erzeuger im Allgemeinen minimal sind zeigt folgender Satz:

Satz 3.11.3. *Für jeden endlichen Grundraum $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ existiert eine supermodulare (sogar eine vollständig monotone) Kapazität $\underline{P} : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deren Erzeuger immer eine Kardinalität größergleich*

$$N = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

besitzen.

Beweis: Betrachte die Menge F aller Elemente des Verbandes 2^Ω mit Rang $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Definiere dann \underline{P} durch ein basic probability assignment m gegeben durch:

$$m(X) = \begin{cases} \frac{1}{|F|} & \text{falls } \text{rk}(X) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

d.h., die fokalen Elemente von m sind genau die Mengen mit Rang $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Wenn M nun ein Erzeuger bestehend aus weniger als N Punkten wäre, so müßte es wenigstens ein $p \in M$ geben mit $p(X) = \underline{P}(X)$ und $p(Y) = \underline{P}(Y)$ für zwei verschiedene Mengen mit Rang $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, denn die Anzahl von Mengen mit Rang $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ist gleich N . Da aber X und Y notwendigerweise unvergleichbar sind gilt $X \vee Y > X$ bzw. $X \vee Y > Y$ und somit $\text{rk}(X \vee Y) > \text{rk}(X) = \text{rk}(Y)$. Das bedeutet aber, dass es ein fokales Element Z mit $Z \leq X \vee Y$ gibt, d.h., es gilt

$$\underline{P}(X \vee Y) = \sum_{v \leq X \vee Y} m(V) > 0.$$

Da alle Teilmengen von X bzw. Y nicht fokal sind gilt weiter

$$\underline{P}(X) = \sum_{V \subseteq X} m(V) = 0 = \sum_{V \subseteq Y} m(V) = \underline{P}(Y)$$

und wegen $X \wedge Y \leq X$ folgt

$$0 \leq \underline{P}(X \wedge Y) \leq \underline{P}(X) = 0,$$

woraus insgesamt

$$\underline{P}(X) + \underline{P}(Y) < \underline{P}(X \wedge Y) + \underline{P}(X \vee Y) \quad (*)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} p(X) + p(Y) &= \underline{P}(X) + \underline{P}(Y) \\ &< \underline{P}(X \wedge Y) + \underline{P}(X \vee Y) \\ &\leq p(X \wedge Y) + p(X \vee Y) \\ &= p(X \wedge Y) + p(X \vee Y) \\ &= p(X) + p(Y) \end{aligned}$$

folgen würde, was ein Widerspruch wäre. ■

Korollar 3.11.1. Für die Prävisionen aus Satz 3.11.3 sind die in Satz 3.11.2 konstruierten Erzeuger minimal.

Bemerkung 3.11.4. Allgemein existiert in jeder ε -Umgebung (bezüglich der Supremumnorm) einer beliebigen supermodularen Kapazität \underline{P} über 2^Ω eine supermodulare Kapazität \underline{P}' , für die die oben konstruierten Erzeuger minimal sind: Sei \underline{Q} die Kapazität aus Satz 3.11.3 und $\varepsilon > 0$. Betrachte dann die supermodulare Kapazität

$$\underline{P}' := (1 - \varepsilon) \underline{P} + \varepsilon \underline{Q}.$$

Dann gilt für alle $X \subseteq \Omega$:

$$\begin{aligned} |\underline{P}'(X) - \underline{P}(X)| &= |(1 - \varepsilon) \underline{P}(X) + \varepsilon \underline{Q}(X) - \underline{P}(X)| \\ &= |\varepsilon \underline{Q}(X) - \varepsilon \underline{P}(X)| \\ &= \varepsilon |\underline{Q}(X) - \underline{P}(X)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Analog zu (*) gilt hier für alle X, Y mit $\text{Rang} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$:

$$\begin{aligned} \underline{P}(X) + \underline{P}(Y) &\leq \underline{P}(X \wedge Y) + \underline{P}(X \vee Y) \\ \underline{Q}(X) + \underline{Q}(Y) &< \underline{Q}(X \wedge Y) + \underline{Q}(X \vee Y), \end{aligned}$$

also auch

$$\underline{P}'(X) + \underline{P}'(Y) < \underline{P}'(X \wedge Y) + \underline{P}'(X \vee Y),$$

so dass ein Erzeuger von P' mindestens $N = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ Punkte besitzen muss. Das die betrachteten Erzeuger nicht immer minimal sind kann man in Beispiel 2 erkennen. Für die obige Kettenüberdeckung entsteht der Erzeuger $M = \{p_1, p_4, p_7, p_8\}$, aber auch die Menge $N = \{p_1, p_4, p_8\}$ erzeugt bereits $P_{2|2^n}$, denn für jede begrenzende Hyperebene H , mit der p_7 inzidiert existieren weitere $p_i \in N$ (nämlich z.B. p_1 und p_8), die ebenfalls mit H inzidieren.

Wenn also nicht alle Extrempunkte sondern nur die Punkte eines Erzeugers einer Prävision zu deren Darstellung genutzt wird verbessert sich das Verhältnis v_1 zu

$$v_2 = \frac{2^n - 2}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot (n - 1)}$$

und mit der Relation

$$\begin{aligned} \binom{n}{2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \binom{n}{2}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} &= \binom{n}{2}^{\frac{n}{2}} \cdot \binom{n}{2}^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \\ &\geq \binom{n}{2}^{\frac{n}{2}} \cdot \binom{n}{2}^{\frac{n}{2}} \\ &\geq \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

sowie der Stirling-Formel und der Bernoulli-Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, x \geq -2$$

folgt

$$\begin{aligned}
v_2 &= \frac{2^n - 2}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot (n-1)} = \frac{(2^n - 2) \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor! \cdot (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!}{n! \cdot (n-1)} \\
&= \frac{(2^n - 2) \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor! \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil!}{n! \cdot (n-1)} \\
&\geq \frac{(2^n - 2) \cdot \left(\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{e}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \left(\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{e}\right)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \cdot \sqrt{2\pi \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \sqrt{2\pi \lceil \frac{n}{2} \rceil}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{1}{12n}} \cdot (n-1)} \\
&= \frac{2^n - 2}{2^n} \cdot \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}{\left(\frac{n}{2}\right)^n} \cdot \sqrt{\frac{2\pi \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}{n \cdot 4 \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)^2}} \cdot e^{\frac{-1}{12n}} \\
&\geq \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{2^n - 2}{2^n} \cdot \sqrt{\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}} \cdot \left[\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\right]^{\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{-1}{12n}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{2^n - 2}{2^n} \cdot \sqrt{\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}} \cdot \left[1 - \frac{1}{n^2}\right]^n \cdot e^{\frac{-1}{12n}} \\
&\geq \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{2^n - 2}{2^n} \cdot \sqrt{\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}} \cdot \left[1 - \frac{n}{n^2}\right] \cdot e^{\frac{-1}{12n}} \\
&\geq c \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2n}}
\end{aligned}$$

für jedes gegebene $c < 1$ und hinreichend großes n . Analog folgt mit

$$\begin{aligned}
\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} &= \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \\
&= \left(\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{2}\right)\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \\
&\leq \left(\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \\
&= \left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \sqrt{\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}
\end{aligned}$$

die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 v_2 &= \frac{(2^n - 2) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor! \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil!}{n! \cdot (n - 1)} \\
 &\leq \frac{(2^n - 2) \cdot \left(\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{e}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \left(\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{e}\right)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (n - 1) \cdot \sqrt{2\pi n}} \cdot e^{\frac{1}{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \cdot e^{\frac{1}{2\lceil \frac{n}{2} \rceil}} \\
 &\leq \frac{2^n - 2}{2^n} \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n} \cdot \sqrt{\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \sqrt{\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}} \\
 &\leq c \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2n}}
 \end{aligned}$$

für gegebenes $c > 1$ und n hinreichend groß, so dass v_2 von der Ordnung $\Theta\left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\right)$ für $n \rightarrow \infty$ ist, was eine sehr langsame Konvergenz gegen 0 für $n \rightarrow \infty$ bedeutet:

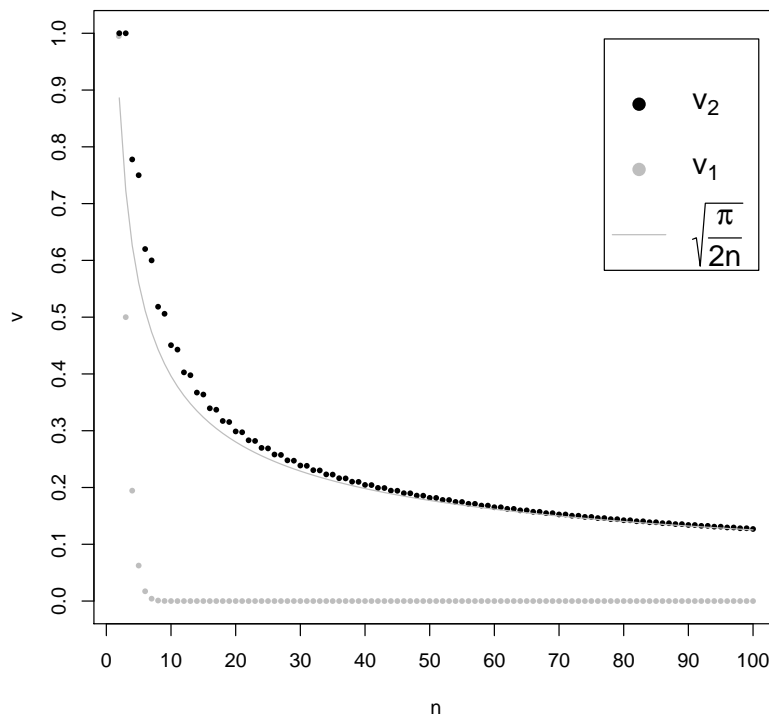


Abbildung 3.11.: Das Verhältnis v_2 bzw. v_1 in Abhängigkeit von n

Die Speicherung einer Prävision durch einen minimalen Erzeuger wäre also im Gegensatz zur

Speicherung aller Extrempunkte sicher auch noch für größere n denkbar.

Bemerkung 3.11.5. Mit Hilfe der Beweisidee von Satz 3.11.3 kann man auch für jedes endliche Ω ($n = |\Omega| \geq 3$) eine verallgemeinerte belief-Funktion \underline{P} , die jedoch nicht kohärent ist, konstruieren: Betrachte den Verband \mathbb{N}_l^Ω mit einem noch zu bestimmenden l und wähle ein beliebiges $\omega_1 \in \Omega$ und k so groß, dass die Menge M aller X aus \mathbb{N}_l^Ω mit Rang $\lfloor \frac{k \cdot n}{2} \rfloor$ und $X(\omega_1) = 0$ mehr als $n!$ Elemente besitzt. Das dies immer möglich ist folgt aus der Tatsache, dass für festes n und $i = 0, \dots, \lfloor \frac{k \cdot n}{2} \rfloor$ sowie zwei weitere beliebige $\omega_2, \omega_3 \in \Omega$ die Multimengen

$$X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_k^\Omega : \omega \mapsto \begin{cases} i \text{ falls } \omega = \omega_2 \\ \lfloor \frac{k \cdot n}{2} \rfloor - i \text{ falls } \omega = \omega_3 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

aus M sind falls $l = \lfloor \frac{k \cdot n}{2} \rfloor$ gewählt wird, so dass $|M| > \lfloor \frac{k \cdot n}{2} \rfloor$ gilt. Verteile dann auf die Elemente der Menge

$$M^* = \{X \vee Y \mid X, Y \in M, X \neq Y\}$$

jeweils die Masse $\frac{1}{|M^*|}$ und den Rest der Masse auf die Elemente $1 \cdot \Omega, 2 \cdot \Omega, \dots, l \cdot \Omega$ und zwar so, dass

$$\sum_{Y \subseteq i \cdot \Omega} m(Y) = i \cdot \Omega, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

gilt. Dann ist \underline{P} eine verallgemeinerte belief-Funktion. Unterhalb von jedem $X \in M$ existiert nach Konstruktion kein fokales Element. Also kann es kein $p \in \text{ext}(\mathcal{M}(\underline{P}))$ mit $\underline{P}(X) = p(X)$ & $\underline{P}(Y) = p(Y)$ für verschiedene $X, Y \in M$ geben. Wäre \underline{P} kohärent, dann würde der Kern von \underline{P} folglich mehr als $n!$ Extrempunkte besitzen, was im Widerspruch zu Satz 3.10.5 stünde. Also ist \underline{P} nicht kohärent.

Eine genauere Betrachtung der Möbiusinversen einer kohärenten supermodularen Prävision zeigt, dass diese immer eine spezielle Struktur besitzt:

3.12. Die Möbiusinverse von kohärenten supermodularen Prävisionen

Satz 3.12.1. Sei $k \geq 2$ und $\underline{P} : \mathbb{N}_k^\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Prävision. Dann ist \underline{P} genau dann supermodular und kohärent, wenn sie bzw. ihre Möbiusinverse m folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $\underline{P}(\emptyset) = 0$

(b) $\underline{P}(\Omega) = 1$

(c) $\forall Y \in \mathbb{N}_k^\Omega : m(Y) = \begin{cases} m(X) & \text{falls } Y = l \cdot X \text{ für ein } X \in 2^\Omega \text{ und ein } l \in \mathbb{N}_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(d) $\underline{P}|_{2^\Omega}$ ist monoton und supermodular.

Beweis:

„ \implies “ : Sei \underline{P} kohärent und supermodular und m die Möbiusinverse von \underline{P} . Dann gelten trivialerweise (a), (b) und (d). Definiere nun $m^* : \mathbb{N}_k^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$m^*(Y) := \begin{cases} m(X) & \text{falls } Y = l \cdot X \text{ für ein } X \in 2^\Omega \text{ und ein } l \in \mathbb{N}_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die zugehörige Prävision \underline{Q} durch:

$$\underline{Q} := m^* * \zeta.$$

Wir zeigen, dass $\underline{P} = \underline{Q}$ gilt, womit (c) gezeigt ist. Sei dazu $X \in \mathbb{N}_k^\Omega$ beliebig aber im Folgenden fest. Da \underline{P} nach Satz 3.10.3 komonoton additiv auf \mathbb{N}_k^Ω ist gilt:

$$\underline{P}(X) = \underline{P}\left(\sum_{i=1}^k S_i(X)\right) = \sum_{i=1}^k \underline{P}(S_i(X)) = \sum_{i=1}^k \sum_{Y \subseteq S_i(X)} m(Y).$$

Für $Y \in 2^\Omega$ definiere $h(Y)$ durch

$$h(Y) := \max\{l \mid l \cdot Y \leq X\}.$$

Dann gilt für jedes $Y \in 2^\Omega$ und jedes $i \in \mathbb{N}_k$ die Äquivalenz

$$Y \subseteq S_i(X) \iff \forall \omega \in \Omega : [Y(\omega) = 1 \implies X(\omega) \geq i] \iff i \cdot Y \leq X \iff h(Y) \geq i$$

und es folgt schließlich

$$\begin{aligned} \underline{Q}(X) &= \sum_{Y \leq X} m^*(Y) \\ &= \sum_{Y \in 2^\Omega, Y \subseteq X} h(Y) \cdot m(Y) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{Y \in 2^\Omega, Y \subseteq X, \\ h(Y) \geq i}} m(Y) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{Y \subseteq S_i(X)} m(Y) = \underline{P}(X). \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “ : Erfülle $\underline{P} : \mathbb{N}_k^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die Struktureigenschaften (a) bis (d). Betrachte

$$Q := (\underline{P}|_{2^\Omega})^\circ.$$

Nach Lemma 3.10.1 ist Q als natürliche Extension einer supermodularen kohärenten unteren Wahrscheinlichkeit kohärent und supermodular. Da $\underline{P}|_{2^\Omega}$ nach Lemma 3.8.15 kohärent ist stimmt Q auf 2^Ω mit \underline{P} überein. Weiterhin erfüllt $Q|_{\mathbb{N}_k^\Omega}$ als kohärente supermodulare Prävision die Struktureigenschaften (a) bis (d) und stimmt deshalb auf ganz \mathbb{N}_k^Ω mit \underline{P} überein, d.h., \underline{P} ist supermodular und kohärent. ■

3.13. Zusammenhang der natürlichen Extension zum Choquetintegral

Für supermodulare kohärente untere Wahrscheinlichkeiten über (endlichem oder unendlichem) Ω beschreibt die natürliche Extension im Wesentlichen nichts anderes als das in [6] bzw. [9] eingeführte **Choquet-Integral**, das als

$$C(X) = \int_0^1 G^{-1}(t) dt = \int_{\inf X}^{\sup X} \underline{P}(S_\alpha(X)) d\alpha$$

mit

$$G(x) = \underline{P}(S_x(X))$$

definiert ist (für die Definition des Integrales und weitere Details siehe [9]). Da die kohärente und zugleich supermodulare Erweiterung einer supermodularen kohärenten unteren Wahrscheinlichkeit eindeutig ist lässt sich eine Integrationstheorie aufbauen, wie in [9] geschehen. Auch die konkrete Berechnung des Choquetintegrals oder der Extrempunkte einer supermodularen kohärenten Prävision gestaltet sich einfacher als im allgemeinen Fall. Andererseits sind die supermodularen kohärenten Prävisionen im Vergleich zu nicht supermodularen kohärenten Prävisionen „rar“ in dem Sinne, dass in jeder ε -Umgebung einer supermodularen kohärenten Prävision \underline{P} über $\mathcal{L}(\Omega)$ eine nicht supermodulare kohärente Prävision \underline{P}' über $\mathcal{L}(\Omega)$ existiert aber nicht umgekehrt.

Um dies (für Ω endlich) einzusehen betrachte z.B. die Menge $X = \{\omega_1\}$, die dazugehörige Hyperebene $H_X = \{q \in \mathcal{P} | q(X) = \underline{P}(X)\}$ mit Normalenvektor $n = (1, 0, \dots, 0)$ und ein beliebiges $p \in M := \mathcal{M}(\underline{P})$ mit $p(X) = \underline{P}(X)$. Definiere nun für $\delta > 0$ die Sphäre

$$S_\delta = \{q \in \mathcal{P}(\Omega) | d(p, q) := \sum_{i=1}^n |p_i - q_i|^2 = \delta\}.$$

und die Prävision

$$\underline{P}_\delta = \mathcal{P}(M \cup S_\delta).$$

Betrachte nun den Kern von \underline{P}_δ , der nichts anderes als der Abschluß der konvexen Hülle von $M \cup S_\delta$ ist. Da nach Konstruktion alle $m \in M$ auf einer Seite der Hyperebene H_X liegen und da M beschränkt ist gibt es wegen der quadratischen Form des Abstandsmaßes d eine Umgebung U des Punktes $x = p + \delta \cdot n$ in der alle Sphärenpunkte

$$S_\delta \cap U$$

Extrempunkte der Menge $\overline{\text{co}}(M \cup S_\delta)$ sind, d.h. der Kern von \underline{P}_δ besitzt unendlich viele Extrempunkte und deshalb kann \underline{P}_δ nicht supermodular sein. Für den Abstand der Prävisionen \underline{P} und \underline{P}_δ gilt

$$\begin{aligned} \|\underline{P} - \underline{P}_\delta\| &= \sup_{\|X\| \leq 1} [P(X) - \underline{P}_\delta(X)] \\ &= \sup_{X \subseteq \Omega} [\min_{q \in M} \sum_{i: \omega_i \in X} q_i - \min_{q \in M \cup S_\delta} \sum_{i: \omega_i \in X} q_i] \\ &\leq n\sqrt{\delta}, \end{aligned}$$

denn für alle q aus $S_\delta \setminus M$ gilt

$$\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2 \leq \delta,$$

woraus

$$\max_{i=1, \dots, n} |p_i - q_i| \leq n\sqrt{\delta}$$

und somit

$$|p(X) - q(X)| \leq n\sqrt{\delta}$$

für beliebiges $X \subseteq \Omega$ folgt. Für vorgegebenes ε liegt dann für $\delta = (\frac{\varepsilon}{n})^2$ die nicht supermodulare Prävision \underline{P}_δ in der ε -Umgebung von \underline{P} .

Würde andersherum in jeder ε -Umgebung einer nicht supermodularen kohärenten Prävision \underline{P} eine supermodulare kohärente Prävision existieren, so würde es eine Folge \underline{P}_n von supermodularen Prävisionen geben, die punktweise gegen \underline{P} konvergieren würde. Da aber der punktweise Grenzwert von supermodularen Prävisionen nach Lemma 3.2.15 (r) wieder supermodular ist wäre dies ein Widerspruch zur Nichtsupermodularität von \underline{P} .

3.14. Approximation von Kapazitäten

Da supermodulare Prävisionen leichter handhabbar sind als beliebige Prävisionen liegt es nahe, Prävisionen durch supermodulare Prävisionen zu approximieren. Die naheliegendste Art der Approximation ist wohl die Approximation von unten, denn sie entspricht einem vorsichtigerem Wettverhalten. Wir beschränken uns im Folgenden auf untere Wahrscheinlichkeiten.

Definition 3.14.1. Sei \underline{P} eine Kapazität über 2^Ω . Eine supermodulare Kapazität \underline{Q} über 2^Ω heißt **(untere) Approximation** von \underline{P} , falls gilt:

- $\underline{Q} \leq \underline{P}$.

In diesem Fall heißt \underline{Q} **pareto-optimal**, falls für jede weitere Approximation \underline{Q}' von \underline{P} gilt:

- $\underline{Q} \leq \underline{Q}' \leq \underline{P} \implies \underline{Q} = \underline{Q}'$.

Das nicht für jede Kapazität eine Approximation existiert, die oberhalb von allen anderen Approximationen liegt, wird sich später zeigen. In [3] werden zwei Algorithmen zur Generation von pareto-optimalen Approximationen vorgestellt. Für Algorithmus I wird im ersten Schritt irgendeine Anfangsapproximation benötigt. Für dieses Problem soll nun eine allgemeine Lösungsidee skizziert werden: Sei $K(\Omega)$ die Menge aller Kapazitäten über 2^Ω und $T : K(\Omega) \rightarrow K(\Omega)$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- T ist intensiv, d.h. für alle Kapazitäten $\underline{P} \in K(\Omega)$ gilt $T(\underline{P}) \leq \underline{P}$.
- T ist genau auf den supermodularen Kapazitäten identisch, d.h. es gilt \underline{P} supermodular $\iff T(\underline{P}) = \underline{P}$.
- Für alle $X \subseteq \Omega$ ist T stetig bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_X : K(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \underline{P} \mapsto \underline{P}(X)$, d.h. T ist punktweise stetig.

Betrachte nun für $\delta \in (0, 1]$ die zugeordneten Operatoren

$$T_\delta := \delta \cdot T + (1 - \delta) \cdot id_{K(\Omega)}$$

und

$$T_\delta^\infty : K(\Omega) \rightarrow K(\Omega) : \underline{P} \mapsto T_\delta^\infty(\underline{P}) : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} (T_\delta^n(\underline{P}))(X),$$

wobei T^n die n -malige Hintereinanderausführung des Operators T bedeutet. Dann ist T_δ nach Konstruktion ein Operator auf $K(\Omega)$ und besitzt ebenfalls die Eigenschaften (a) bis (c). Der Operator T_δ^∞ ordnet jeder Kapazität \underline{P} eine untere Approximation von \underline{P} zu:

Zunächst ist T_δ^∞ wohldefiniert, denn wegen der Intensionalität von T_δ ist die Folge $(T_\delta^n(\underline{P}))(X)$ für alle X eine durch 0 beschränkte monoton fallende Folge, die einen Grenzwert besitzt. Außerdem ist der punktweise Grenzwert einer Folge von Kapazitäten, die von \underline{P} dominiert werden, wieder

eine Kapazität, die durch \underline{P} dominiert wird. Es bleibt noch die Supermodularität von T_δ^∞ zu zeigen:

Wenn $T_\delta^\infty(\underline{P})$ nicht supermodular wäre würde $T_\delta(T_\delta^\infty(\underline{P})) < T_\delta^\infty(\underline{P})$ folgen, d.h. es würde ein $\varepsilon \neq 0$ und ein $X \subseteq (\Omega)$ mit

$$\varepsilon = (T_\delta^\infty(\underline{P}))(X) - (T_\delta(T_\delta^\infty(\underline{P})))(X)$$

existieren. Da aber wegen der Stetigkeit von T_δ der Ausdruck

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (T_\delta^\infty(\underline{P}))(X) - (T_\delta(T_\delta^\infty(\underline{P})))(X) \\ &= (T_\delta^\infty(\underline{P}))(X) - (T_\delta^{n+1}(\underline{P}))(X) \\ &\quad + (T_\delta(T_\delta^n(\underline{P})))(X) - (T_\delta(T_\delta^\infty(\underline{P})))(X) \end{aligned}$$

für hinreichend großes n beliebig klein wird, muß ε gleich 0 sein, was ein Widerspruch ist.

Wir konstruieren nun in naheliegender Weise einen Operator T . Für \underline{P} bezeichne

$$\mathcal{C}(\underline{P}) = \{p_\sigma \mid \sigma \in S(n)\}$$

die Menge aller der Kapazität \underline{P} zugeordneten p_σ (siehe Definition 3.8.5). Definiere dann T durch:

$$T : K(\Omega) \longrightarrow K(\Omega) : \underline{P} \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{C}(\underline{P}))|_{2^\Omega}.$$

Dann erfüllt T die Eigenschaften (a) bis (c):

(a) Für beliebiges $X \subseteq \Omega$ existiert eine maximale Kette K in 2^Ω mit $X \in K$. Mit der zugehörigen Permutation σ folgt:

$$(T(\underline{P}))(X) \leq p_\sigma(X) = \underline{P}(X).$$

(b) Ist \underline{P} supermodular, so sind die Extrempunkte von $\mathcal{M}(\underline{P})$ genau die p_σ und es folgt:

$T(\underline{P}) = \mathcal{P}(\mathcal{C}(\underline{P}))|_{2^\Omega} = \mathcal{P}(\text{ext}(\mathcal{M}(\underline{P})))|_{2^\Omega} = \underline{P}|_{2^\Omega} = \underline{P}$. Für nicht supermodulares \underline{P} existiert ein nicht zulässiges $p_\sigma \in \mathcal{C}(\underline{P})$ und ein $X \subseteq \Omega$ mit $p_\sigma(X) < \underline{P}(X)$ woraus $(T(\underline{P}))(X) \leq p_\sigma(X) < \underline{P}(X)$ folgt.

(c) Sei \underline{P}_n eine Folge von Kapazitäten, die punktweise gegen eine Kapazität \underline{P} konvergiert. Dann konvergiert für eine feste Permutation σ das zu \underline{P}_n gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß p_n gegen das zu \underline{P} gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß p , denn für $X \subseteq \Omega$ gilt:

$$p_n(X) - p(X) = \sum_{Y \subseteq \Omega} \lambda_Y \underline{P}_n(Y) - \sum_{Y \subseteq \Omega} \lambda_Y \underline{P}(Y) = \sum_{Y \subseteq \Omega} \lambda_Y (\underline{P}_n(Y) - \underline{P}(Y))$$

für geeignete Koeffizienten λ_Y . Daraus folgt nun, dass der Ausdruck

$$(T(\underline{P}_n))(X) - (T(\underline{P}))(X) = \min_{p \in \mathcal{C}(\underline{P}_n)} p(X) - \min_{p \in \mathcal{C}(\underline{P})} p(X)$$

für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

Speziell für $\delta = 0.5$ wenden wir nun T bzw. T_δ auf die Kapazität \underline{P} aus Beispiel 1 aus [3] an:

X	$X(\omega_1)$	$X(\omega_2)$	$X(\omega_3)$	$X(\omega_4)$	$\underline{P}(X)$	$(T(\underline{P}))(X)$	$(T_\delta(\underline{P}))(X)$	$Q(X)$
X_1	0	0	0	0	0	0	0	0
X_2	1	0	0	0	0	0	0	0
X_3	0	1	0	0	0	0	0	0
X_4	1	1	0	0	0.25	0	0.125	0.1251
X_5	0	0	1	0	0	0	0	0
X_6	1	0	1	0	0	0	0	0
X_7	0	1	1	0	0.5	0.25	0.375	0.3749
X_8	1	1	1	0	0.5	0.5	0.5	0.5
X_9	0	0	0	1	0	0	0	0
X_{10}	1	0	0	1	0.25	0	0.125	0.1249
X_{11}	0	1	0	1	0	0	0	0
X_{12}	1	1	0	1	0.25	0.25	0.25	0.25
X_{13}	0	0	1	1	0.5	0.25	0.375	0.375
X_{14}	1	0	1	1	0.5	0.5	0.5	0.5
X_{15}	0	1	1	1	0.75	0.75	0.75	0.75
X_{16}	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabelle 3.11.: Approximationen einer Kapazität \underline{P}

Die Approximation $T_\delta(\underline{P})$ ist hier schon pareto-optimal. Um dies einzusehen betrachte eine weitere supermodulare Kapazität \underline{Z} mit $T_\delta(\underline{P}) \leq \underline{Z} \leq \underline{P}$. Dann würden nichtnegative $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ existieren mit:

$$\underline{Z}(X) = \begin{cases} T_\delta(X_4) + \varepsilon_1 & \text{falls } X = X_4 \\ T_\delta(X_7) + \varepsilon_2 & \text{falls } X = X_7 \\ T_\delta(X_{10}) + \varepsilon_3 & \text{falls } X = X_{10} \\ T_\delta(X_{13}) + \varepsilon_4 & \text{falls } X = X_{13} \\ T_\delta(X) & \text{sonst,} \end{cases}$$

denn außer auf X_4, X_7, X_{10} und X_{13} sind \underline{P} und $T_\delta(\underline{P})$ identisch. Aus der Supermodularitätsforderung folgt mit X_4 und X_7 :

$$\begin{aligned} \underline{Z}(X_4) + \underline{Z}(X_7) &= 0.125 + \varepsilon_1 + 0.375 + \varepsilon_2 \\ &\leq \underline{Z}(X_4 \wedge X_7) + \underline{Z}(X_4 \vee X_7) \\ &= \underline{Z}(X_3) + \underline{Z}(X_8) \\ &= 0 + 0.5, \end{aligned}$$

also $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Mit X_4 und X_{10} folgt weiter:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}(X_4) + \underline{Z}(X_{10}) &= 0.125 + 0.125 + \varepsilon_3 \\
 &\leq \underline{Z}(X_4 \wedge X_{10}) + \underline{Z}(X_4 \vee X_{10}) \\
 &= \underline{Z}(X_2) + \underline{Z}(X_{12}) \\
 &= 0 + 0.25,
 \end{aligned}$$

woraus auch $\varepsilon_3 = 0$ folgt. Schließlich folgt mit X_{13} und X_7 :

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}(X_{13}) + \underline{Z}(X_7) &= 0.375 + \varepsilon_4 + 0.375 \\
 &\leq \underline{Z}(X_{13} \wedge X_7) + \underline{Z}(X_{13} \vee X_7) \\
 &= \underline{Z}(X_5) + \underline{Z}(X_{15}) \\
 &= 0 + 0.75,
 \end{aligned}$$

so dass auch ε_4 Null ist und somit \underline{Z} und T_δ identisch sind. Wir haben also für $\delta = 0.5$ eine sehr gute Startlösung gefunden, die sogar mit der pareto-optimalen Endlösung aus Beispiel 1 aus [3] übereinstimmt. Auch für Beispiel 2 aus [3] ist für $\delta = 0.5$ die Approximation $T_\delta(\underline{P})$ pareto-optimal und stimmt mit der Endlösung aus [3] überein, so dass die konstruierten T_δ mögliche Kandidaten für eine pareto-optiale Approximation sind. Da aber die Anzahl der p_σ für die Berechnung von $T(\underline{P})$ bzw. $T_\delta(\underline{P})$ mit $n!$ sehr groß ist sind diese Approximationen für große n höchstens von theoretischem Interesse.

Das es hier keine supermodulare Approximation gibt, die alle weiteren supermodularen Approximationen dominiert, sieht man daran, dass sie dann auch T_δ dominieren müsste und folglich mit T_δ identisch wäre. Die geratene supermodulare Approximation Q aus Tabelle 3.11 liegt aber nicht unterhalb von T_δ .

4. Ausblick

Zum Schluß wollen wir noch einige Fragen und Gedanken äußern, die sich aus der Beschäftigung mit dem Diplomthema ergaben.

- (a) Gibt es analog zur supermodularen unteren Approximation einer Kapazität (über 2^Ω) eine vollständig monotone Approximation? Dazu könnte man in ähnlicher Weise einen Operator T konstruieren, der intensiv, stetig und genau auf den vollständig monotonen Kapazitäten identisch ist. Eine naheliegende Idee dazu ist, die Möbiusinverse einer gegebenen Kapazität zu betrachten und eventuell vorhandene negative Massen $m(X)$ solange auf geeignete Weise auf Teilmengen von X umzuverteilen, bis die Gesamtmasse für alle $X \in 2^\Omega$ nichtnegativ ist. Falls dies immer möglich ist, dann ist der so erhaltene Operator intensiv und genau auf den vollständig monotonen Kapazitäten identisch. Auch die Stetigkeit wäre unproblematisch. Daraus leitet sich dann auch die Frage ab, ob es immer eine vollständig monotone Approximation gibt, die, als supermodulare Approximation betrachtet, pareto-optimal ist. Dies hätte dann den Vorteil, dass die konkrete Berechnung der Approximation einfacher sein könnte, wenn man gleich auf der Ebene der Möbiusinversen operiert. Die Umwandlung der Möbiusinversen in die zugehörige Kapazität kann dann relativ einfach mit der schnellen Möbiustransformation (siehe dazu z.B. [18]) geschehen.
- (b) Es wurde schon gesagt, dass der Kern einer unteren Wahrscheinlichkeit auch im allgemeinen Fall maximal $|\Omega|!$ Extrempunkte besitzt. Der Beweis aus [39] für den allgemeinen Fall ist aber nicht konstruktiv. Gibt es eine konstruktive Charakterisierung der Extrempunkte und wenn ja, läßt sich diese auf Prävisionen über \mathbb{N}_k^Ω übertragen? Eine einfache Charakterisierung durch Ketten oder Antiketten in 2^Ω oder \mathbb{N}_k^Ω scheint es nicht zu geben, denn z.B. bei Beispiel 5 besitzt \underline{P}_5 eingeschränkt auf \mathbb{N}_2^Ω einen Kern mit 96 Extrempunkten (dies scheint die maximale Anzahl von Extrempunkten für eine Prävision über \mathbb{N}_2^Ω für vierelementiges Ω zu sein, denn durch Herumprobieren konnte keine weitere Prävision mit mehr Extrempunkten gefunden werden), die Weite von 2^Ω bzw. \mathbb{N}^Ω beträgt aber 6 bzw. 19 und die Anzahl maximaler Ketten in 2^Ω bzw. \mathbb{N}_2^Ω beträgt 24 bzw. 2520 (zur Berechnung verwende z.B. Lemma 3.3.10 und Lemma 3.3.9). Ähnlich unklar ist, wie im allgemeinen Fall minimale Erzeuger konstruiert werden können.
- (c) Kann man die Kohärenz einer Prävision im allgemeinen Fall durch die Struktur ihrer Möbiusinversen charakterisieren, bzw. kann die natürliche Extension mithilfe der Möbiusinversen einfacher berechnet werden?

- (d) Viele in der Praxis vorkommenden Modelle \underline{P} sind supermodular (z.B. durch mengenwertige Abbildungen induzierte Belief-funktionen oder sogenannte linear-vacuous-mixtures, das sind Konvexkombinationen von linearen und völlig uninformativen Modellen, siehe [37], S.93 f). Gibt es interpretatorische Rechtfertigungen für die Annahme der Supermodularität oder der komonotonen Additivität? Dies scheint nicht gegeben zu sein:
I do not „... know any rationality argument for two-monotonicity, beyond its computational convenience.“ ([35], S.51)
- (e) Läßt sich aufbauend auf dem hier propagierten verallgemeinerten Wahrscheinlichkeitsbegriff eine zufriedenstellende Testtheorie aufbauen? Für supermodulare und für einige kohärente Wahrscheinlichkeiten scheint dies möglich zu sein (siehe dazu das Huber-Strassen-Theorem [16] und die Arbeit von Augustin [1]). Wie wirkt sich ein verallgemeinertes Wahrscheinlichkeitskonzept auf die Entscheidungstheorie aus? Beispielsweise die Äquivalenz zwischen „prior risk“ und „posterior loss“ ist nicht mehr gegeben, siehe [2].
- (f) Sind kohärente untere Prävisionen nicht allgemein genug? Es gibt noch allgemeinere Ansätze, um unsicheres Wissen zu beschreiben, beispielsweise „sets of desirable gambles“, „partial preference orderings“ und „sets of probability measures“, siehe [38]. In diesem Zusammenhang stellt sich auch die Frage, ob man eine kohärente Prävision als lower envelope mehrerer Wahrscheinlichkeitsmaße ansieht, von denen eines das richtige ist, das im Hintergrund wirklich existiert, oder ob man die kohärente Prävision selbst als fundamentaler betrachtet.

Literaturverzeichnis

- [1] Augustin, T. (1998). Optimale Tests bei Intervallwahrscheinlichkeit. Vandenhoeck & Ruprecht. Göttingen.
- [2] Augustin, T. (2003). On the Suboptimality of the Generalized Bayes Rule and Robust Bayesian Procedures from the Decision Theoretic Point of View - a Cautionary Note on Updating Imprecise Priors. In J.M. Bernard, T. Seidenfeld, and M. Zaffalon (Eds.), ISIPTA 03: Proceedings of the Third International Symposium on Imprecise Probabilities and their Applications. Carleton Scientific.
- [3] Bronevich, A.G., Augustin, T. (2009). Approximation of coherent lower probabilities by 2-monotone measures. 6th International Symposium on Imprecise Probability: Theories and Their Applications. Durham. United Kingdom.
- [4] Carnap, R. (1950). Logical Foundations of Probability. U. Chicago Pr.
- [5] Chateauneuf, A., Jaffray, J.-Y. (1989). Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Möbius inversion. Math Social Sci **17(3)**, 263-283.
- [6] Choquet, G. (1953-54). Theory of capacities. Ann. Inst. Fourier (U. Grenoble) **5**, 131-295.
- [7] De Bruijn, N. G., Van Ebbenhorst Tengbergen, Ca., Kruyswijk, D. (1951). On the set of divisors of a number. Nieuw Arch. Wiskunde **23**, 191-193.
- [8] Dempster, A.P. (1967). Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. Ann. Math. Statist. **38**, 325-339.
- [9] Denneberg, D. (1994). Non-Additive Measure and Integral. Theory and Decision Library. Ser. B. Mathematical and Statistical Methods. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.
- [10] Ellsberg, D. (1961). Risk, ambiguity, and the Savage axioms. Quart. J. Econ. **75**, 643-669.
- [11] de Finetti, B. (1981). Wahrscheinlichkeitstheorie. Oldenbourg Verlag GmbH. München
- [12] van Fraassen, B. (1989). Laws and Symmetry. Clarendon Press. Oxford.
- [13] Grabisch, M. (2009). Belief functions on lattices. International Journal of Intelligent Systems **24**, 76-95.

- [14] Hájek, A. (2002). Interpretations of Probability. <http://plato.stanford.edu/entries/probability-interpret/>. ISSN: 1095-5054, Rev. 2009-12-31 / Zit. 2011-07-26.
- [15] Hampel, F. On the foundations of statistics: A frequentist approach, in M. S. de Miranda and I. Pereira (eds), *Estatística: a diversidade na unidade*, Edições Salamandra. Lda. Lisboa. Portugal. 77-97.
- [16] Huber, P.J. , Strassen, V. (1973). Minimax tests and the Neyman-Pearson lemma for capacities. *Annals of Statistics*. **1**, 251-263. Correction: **2**, 223-224.
- [17] Ishiishi, T. (1981). Super-modularity: applications to convex games and to the greedy algorithm for LP. *J. Econom. Theory* **25**, 283-286.
- [18] Kennes, R. Computational Aspects of the Möbius Transformation of Graphs. *IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS*, **22**, 2.
- [19] Kolmogorov, A.N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer. Berlin (Nachdruck:1973).
- [20] Laplace, P. S. (1814). English edition (1951). *A Philosophical Essay on Probabilities*. Dover Publications Inc. New York.
- [21] Miranda, E., Couso, I., Gil, P. (2003). Extreme points of credal sets generated by 2-alternating capacities. *International Journal of Approximate Reasoning* **33**, 95-115.
- [22] von Mises, R. (1957). *Probability, Statistics and Truth*. (English translation of 3rd German edition, 1951.) Georg Allen & Unwin, London.
- [23] Popper, K.R. (1959). *The Logic of Scientific Discovery*. Hutchinson, London.
- [24] Popper, K.R. (1959). The propensity interpretation of probability. *Brit. J. Philos. Sci.* **10**, 25-42. Reprinted in Tuomela (1978).
- [25] Ramsey, F.P. (1931). *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, ed. R.B. Braithwaite. Kegan Paul, Trench, Trubner; London.
- [26] Reichenbach, H. (1935). *Wahrscheinlichkeitslehre*. A. W. SIJTHOFF'S UITGEVERSMIJ N.V. , Leiden.
- [27] Roman, S. (2008). *Lattices and Ordered Sets*. Springer. New York.
- [28] Rota, G.-C. (1964). On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Möbius functions. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*. **2**, 340-368.
- [29] Savage, L.J. (1951). *The Foundations of Statistics*. New York.
- [30] Shafer, G. (1976). *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton U. Pr.

- [31] Shapley, L.S. (1971). Cores of convex games. *Int. J. Game Theory* **1**, 11-26.
- [32] Skyrms, B. (1984). *Pragmatics and Empiricism*. Yale University. New Haven. Press.
- [33] Venn, J. (1888). *The Logic of Chance*, 3rd edition. Macmillan, London.
- [34] Walker, E.A. (2005). An Algebraic Setting for Belief Functions. Proceedings of the 21-st NAFIPS International Conference, June 22-25. Ann Arbor. Michigan. 407-411.
- [35] Walley, P. (1981). Coherent lower (and upper) probabilities. Statistics Research Report 22. Univ. of Warwick. Coventry.
- [36] Walley, P., Fine, T.L. (1982). Towards a frequentist theory of upper and lower probability. *Ann. Statist.* **10**, 741-761.
- [37] Walley, P. (1991). *Statistical reasoning with imprecise probabilities*. Chapman and Hall,. London.
- [38] Walley, P. (2000). Towards a unified theory of imprecise probability. *International Journal of Approximate Reasoning* **24**, 125-148.
- [39] Wallner, A. (2007). Extreme points of coherent probabilities in finite spaces. *International Journal of Approximate Reasoning* **44**, 339-357.
- [40] Werner, D. (2007). *Funktionalanalysis*. Springer. New York.

A. Notation

\forall	Allquantor
\exists	Existenzquantor
$\&$	logische Konjunktion
\neg	logische Negation
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich 0)
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{N}_k	Menge der natürlichen Zahlen kleinergleich k
$\mathbb{N}_{\geq 2}$	Menge der natürlichen Zahlen größergleich 2
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Menge der reellen Zahlen größergleich 0
$\lfloor x \rfloor$	größte natürliche Zahl, die kleinergleich x ist
$\lceil x \rceil$	kleinste natürliche Zahl, die größergleich x ist
$[a, b] = \{x \in M \mid a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall (M und \leq hängen vom Kontext ab)
$(a, b) = \{x \in M \mid a < x < b\}$	offenes Intervall
$ x $	Betrag der reellen Zahl x
$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$	kartesisches Produkt der Mengen A und B
$f : B \rightarrow C$	Abbildung f von B nach C
$f : B \rightarrow C : b \mapsto f(b)$	Abbildung f , die jedem $b \in B$ das Element $f(b)$ aus C zuordnet

$f : A \supseteq B \rightarrow C$ Abbildung f von B nach C , wobei B eine Teilmenge von A ist
 $f : A \subseteq B \rightarrow C$ Abbildung f von B nach C , wobei B eine Obermenge von A ist
 C^B Menge aller Abbildungen von der Menge B in die Menge C
 $\text{dom}(f)$ Domäne (Definitionsbereich) der Abbildung f
 $\text{Im}(f) = \{f(x) | x \in \text{dom}(f)\}$ Bild der Abbildung f
 $f|_D$ Einschränkung der Funktion f im Definitionsbereich auf die Menge $D \subseteq \text{dom}(f)$
 Ω Grundraum
 2^Ω Menge aller Teilmengen von Ω
 $\mathcal{L}(\Omega)$ Menge aller Spiele über Ω
 $\mathcal{L}(\Omega)_{\geq 0}$ Menge aller Spiele X über Ω mit $X \geq 0_\Omega$
 $\mathcal{P}(\Omega)$ Menge aller linearen Prävisionen über Ω
 $K(\Omega)$ Menge aller Kapazitäten über 2^Ω
 \mathbb{N}^Ω Menge aller Multimengen über Ω
 \mathbb{N}_k^Ω Menge aller k -beschränkten Multimengen über Ω
 $\mathbb{1}_A$ charakteristische Funktion der Menge $A \subseteq \Omega$
 0_A Nullabbildung, die jedem $a \in A$ den Wert 0 zuordnet
 $\text{id}_\Omega : \Omega \rightarrow \Omega : \omega \mapsto \omega$ identische Abbildung auf Ω
 $X \wedge Y$ punktweises Infimum der Spiele X und Y
 $X \vee Y$ punktweises Supremum der Spiele X und Y
 $X^c = 1 - X$ Komplement der Menge bzw. des Spiels X
 $X \setminus Y = X \cup Y^c$ Die Menge bzw. das Spiel X ohne Y
 $X \cap Y = X \cdot Y$ Schnitt der Spiele X und Y
 $X \cup Y = X + Y - X \cdot Y$ Vereinigung der Spiele X und Y

$\inf X$ Infimum der Menge $\{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$
 $\sup X$ Supremum der Menge $\{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$
 $|X| : \text{dom}(X) \rightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto |X(\omega)|$ punktwieser Betrag des Spieles X
 $\text{supp}(X) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \neq 0\}$ Träger des Spieles X
 $\|\cdot\|_\infty := \sup |X|$ Supremumnorm
 $\text{ASL}(\Omega)$ Menge aller Prävisionen über Ω , die sicheren Verlust vermeiden
 $f \circ g$ kontravariante Verknüpfung der Abbildungen f und g : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
 $\text{ext}(M)$ Menge der Extrempunkte der Menge M
 $\overline{\text{co}}(M)$ Abschluss der konvexen Hülle der Menge M
 $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ abgeschlossene Einheitskugel im normierten Raum X
 X' (topologischer) Dualraum zum normierten Raum X
 $f[M] = \{f(m) | m \in M\}$ komplexschreibweise für das Bild der Menge M unter f
 $f^{-1}[M] = \{x \in \text{dom}(M) | f(x) \in M\}$ Urbild der Menge M unter f
 $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ Skalarprodukt der Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$
 $x_n \rightarrow X$ für $n \rightarrow \infty$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ Die reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x
 $X_n \rightarrow X$ für $n \rightarrow \infty$ Die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Spielen über Ω konvergiert bezüglich der
Supremumnorm gegen das Spiel X , d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\|_\infty = 0$
 $S(n)$ Menge aller Permutationen über $\{1, \dots, n\}$

B. Einige benötigte Definitionen und Sätze der Funktionalanalysis

Es folgen einige Definitionen und Sätze aus [40], die für unsere Zwecke leicht abgändert wurden.

Definition B.0.2. ([40],S.1)

Sei X ein Vektorraum (über \mathbb{R}). Eine Abbildung $p : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt **Halbnorm**, falls

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in X & : p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \\ \forall x, y \in X & : p(x + y) \leq p(x) + p(y) \end{aligned}$$

gilt. Gilt außerdem

$$p(x) = 0 \iff x = 0,$$

dann heißt p **Norm** und Paar (X, p) heißt **normierter Raum**.

Definition B.0.3. ([40],S.58) Der Raum der stetigen linearen Funktionale auf einem normierten Raum X heißt **(topologischer) Dualraum** von X und wird mit X' bezeichnet. Auf X' sind Addition $+$ und Skalarprodukt \cdot in naheliegenderweise definiert:

$$\begin{aligned} + & : X' \times X' \rightarrow X' : (x', y') \mapsto x' + y' : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x'(x) + y'(x) \\ \cdot & : \mathbb{R} \times X' \rightarrow X' : (\lambda, x') \mapsto \lambda \cdot x' : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \lambda \cdot x'(x). \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind wirklich wohldefiniert und X' bildet mit $+$ und \cdot einen linearen Raum. Der Dualraum X' wird üblicherweise mit der Norm $\|x'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)|$ versehen.

Definition B.0.4. ([40],S.397/387) Auf dem Dualraum X' eines normierten Raumes definieren die Halbnormen

$$p_x(x') = |x'(x)| \quad (x' \in X) \quad (*)$$

die schwach $*$ - Topologie $\sigma(X', X)$. Diese Topologie ist die schwächste Topologie, für die die Halbnormen $(*)$ stetig sind.

Bemerkung B.0.5. Eine Folge x'_n konvergiert genau dann bezüglich der schwach $*$ - Topologie gegen ein x' , falls für alle $x \in X$

$$x'_n(x) \rightarrow x'(x)$$

gilt. Deshalb sind Mengen der Form $\{x' \in X \mid x'(x) \geq \lambda\}$ mit festem $x \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ immer schwach $*$ - abgeschlossen.

Lemma B.0.6. ([40], S.102)

Ist X ein normierter Raum über \mathbb{R} und $V \subseteq X$ konvex und offen mit $0 \notin V$, so existiert $x' \in X'$ mit

$$\forall x \in V : x'(x) > 0.$$

Satz B.0.7. (Satz von Hahn-Banach; Trennungsversion II, [40], S.104)

Sei X ein normierter Raum, $V \subseteq X$ sei abgeschlossen und konvex, und es sei $x \notin V$. Dann existiert $x' \in X'$ mit

$$x'(x) < \inf\{x'(v) \mid v \in V\}.$$

Lemma B.0.8. ([40], S. 410)

Ein lineares Funktional auf X' ist genau dann schwach $*$ - stetig, wenn es ein Auswertungsfunktional $x' \mapsto x'(x)$ ist.

Satz B.0.9. (Satz von Alaoglu-Bourbaki, [40], S.413/414)

Ist X ein normierter Raum, so ist $B_{X'}$ schwach $*$ - kompakt.

Satz B.0.10. (Satz von Krein-Milman, [40], S.422)

Sei X ein lokalkonvexer Hausdorffraum, und $K \subseteq X$ sei kompakt, konvex und nicht leer. Dann gilt

$$K = \overline{\text{co}} \text{ ext}(K).$$

Index

- 0-normiert, 71
- 1-normiert, 71
- α -Schnitt, 20
- Äquivalenzrelation, 38

- additiv, 46
- Adjunktion, 62
- Antikette, 40
- antisymmetrisch, 38
- antiton, 45
- Approximation, 138
- avoiding sure loss, 27

- basic probability assignment, 70, 71
- Belief-Funktion, 78
 - verallgemeinerte, 78
- beschränkt, 19
 - punktweise, 19

- capacity, 24
- charakteristische Funktion, 19
- Choquet-Integral, 136
- coherence, 28

- Dichte, 71
 - nichtnormiert, 71
- Dilworth's theorem, 41
- dominieren, 31
- duale Prävision, 34
- Dualraum, 150

- Einhüllende
 - untere, 81

- Einheit, 73
- Erzeuger, 125
 - minimal, 125
- extensiv, 45
- extensiv infimumabgeschlossen, 51
- extensiv supremumabgeschlossen, 51
- Extrempunkte, 94

- Faltung, 71
- Faltungszерlegungsgleichung, 78
- fokales Element, 71
- Frequentismus, 10

- Galoisverbindung, 62
- geordnete Menge, 38

- Höhe, 40
- Hüllenoperator, 45
- Halbnorm, 150

- idempotent, 39, 45
- incurring sure loss, 27
- Infimum, 38
- infimumabgeschlossen, 45
- infimumtreu, 45
- intensiv, 45
- Inzidenzalgebra, 71

- k-alternierend, 45
- k-monoton, 45
- Kapazität, 24
- Kern, 81, 92
- Kernoperator, 45

Kette, 40
 Größe, 40
 maximale, 40
 Kette
 zulässige, 96
 Kettenüberdeckung, 40
 Kettenlänge, 40
 kohärent, 48
 als obere Prävision, 34
 Kohärenz, 28
 komonoton, 23
 komonoton additiv, 114
 konfliktfrei, 71
 konvex, 94
 konvexe Hülle, 94

 Länge, 40
 lineare Prävision, 29
 lokal endlich, 39
 lower envelope, 81
 Lower envelope theorem, 81

 Möbiusfunktion, 75
 Möbiusinverse, 77
 Marginalspiel, 27
 Massenfunktion, 70, 71
 nichtnormiert, 71
 maximal, 38
 minimal, 38
 modular, 45
 monoton, 45
 Multimenge, 41
 k-beschränkt, 42

 Nachbarschaftsrelation, 40
 natürliche Extension, 29, 48
 nicht wünschenswert, 24
 Norm, 150
 normiert, 71
 normierter Raum, 150

 obere Prävision, 34
 obere Schranke, 38
 oberer Nachbar, 40
 Ordnungsrelation, 38

 pareto-optimal, 138
 Permutation
 zulässige, 96
 Plausibility-Funktion, 78
 verallgemeinerte, 78
 Prävision, 24
 lineare, 29
 obere, 34
 verallgemeinerte, 48
 Prävision
 zulässige, 81
 Prinzip vom unzureichenden Grund, 6

 quasigeordnete Menge, 38
 Quasiordnung, 38

 Rangfunktion, 41
 Rechtsmodul, 75
 reflexiv, 38
 residuale Abbildung, 62
 residuierte Abbildung, 62

 Satz von Alaoglu-Bourbaki, 94, 151
 Satz von Hahn-Banach, 151
 Satz von Krein-Milman, 95, 151
 schwach *-Topologie, 150
 schwach positiv, 71
 Separation lemma, 82
 Spiel, 19
 einfaches, 22
 subadditiv, 46
 submodular, 45
 superadditiv, 46
 supermodular, 45
 Supremum, 38
 supremumabgeschlossen, 45

supremumtreu, 45
symmetrisch, 38

Träger, 41
transitiv, 38
Trennungslemma, 151

untere Einhüllende, 81
untere Schranke, 38
untere Wahrscheinlichkeit, 24
unterer Nachbar, 40
unvergleichbar, 38

verallgemeinerte Belief-Funktion, 78
verallgemeinerte Plausibility-Funktion, 78
verallgemeinerte Prävision, 48
vergleichbar, 38
vollständig alternierend, 45
vollständig monoton, 45

Wahrscheinlichkeit
 untere, 24
Wahrscheinlichkeitsmaß
 zulässiges, 81
weight of evidence, 70
Weite, 40
wesentliche Domäne, 33

Zerlegungsgleichung, 65, 66
Zeta-Funktion, 75

ERKLÄRUNG

Hiermit erkläre ich, dass ich die am heutigen Tag eingereichte Diplomarbeit zum Thema „Modellierung unsicheren Wissens durch kohärente Prävisionen“ unter Betreuung von Prof. Dr. rer. nat. habil. Stefan E. Schmidt selbstständig erarbeitet, verfasst und Zitate kenntlich gemacht habe. Andere als die angegebenen Hilfsmittel wurden von mir nicht benutzt.

Datum

Unterschrift