Frei nach de Finetti lautet der Titel meines Vortrags:

Randomness Does Not Exist

Modell

Das Grundmodell ist:

$$(\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{X}, X)$$

zuzüglich $\sigma-$ Algebren und formaler Restriktionen.

Hierbei ist $\mathcal{P}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Ω. $\mathbb{X}$ ist der Stichprobenraum, das ist die Menge der möglichen Beobachtungen, d.h. der Werte von X. X ist eine Zufallsvariable, d.h., eine (messbare) Abbildung von Ω in $\mathbb{X}$:

$$X : \Omega \to \mathbb{X}$$

Frequentistische Schule:

$\mathcal{P}$ enthält die *wahre* Verteilung, P_0

Wahrscheinlichkeitszuweisungen sind nur

in Bezug auf Zufallsgrößen sinnvoll!!

Nimmt man $\mathcal{P}$ aus dem Modell, dann ist es vorbei mit jeglichem Hinweis auf "ontologische Zufälligkeit". Was bleibt ist eine Abbildung. Einige Werte einer solchen Abbildung werden als Realisationen einer Zufallsvariable interpretiert.

Daten, Empirie und Zufälligkeit

Eine Zufallsvariable X – insbesondere deren "ontologische Zufälligkeit" – ist empirisch akzessibel, das macht sie zu einer Art "theoretischem Term" und ist für sich genommen nicht schlimm. Wie kann sie "ontologische Zufälligkeit" ausdrücken?

Ob man nun empirische Daten rigoros oder per Augenschein als "zufällig" qualifiziert – durch Feststellung von "Regellosigkeit" in einem engeren oder weiteren Sinn – , es ist hiermit nichts darüber zu befinden, dass sie deswegen Realisationen einer Zufallsvariablen sind – ausser im trivialen Sinn: eine Abbildung X zu deren Wertebereich sie gehören, ist sicher zu finden.

Die Vorgehensweise einen Datensatz als zufällig im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie zu betrachten, wenn er statistisch als $i.i.d$ oder "unkorreliert" o.Ä. nachgewiesen ist, ist *zirkulär*, da diese Begriffsbildungen schon voraussetzen, dass ein Datensatz die Realisation einer Zufallsvariablen sein kann. Mithin kann ein Datensatz keinen empirischen Hinweis darauf geben, dass seine "ontologische Zufälligkeit" durch eine Zufallsvariable zum Ausdruck kommt.

Trotzdem: Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsmaße scheinen etwas "von der Welt" auszudrücken.

Gütekriterien – in weiterer Zirkel

Welche Kriteriologie man auch verwendet, eine Kriteriologie wird mit dem Anspruch formuliert, auszudrücken, *was* “gut” ist. Es ist Festzuhalten, dass die Formulierung und Untersuchung von Gütekriterien ganz im Bereich der theoretischen Statistik verbleibt. Hier werden theoretische Größen miteinander in Verbindung gesetzt. Wobei natürlich auch Intuitionen einfließen, wann ein Verfahren “gut” ist (Erwartungstreue). Intuitionen dieser Art werden dann mathematisch formuliert. Die Qualität eines Kriteriums selbst ist jedoch nicht Gegenstand einer statistischen Überprüfung anhand von empirischen Daten. Hinsichtlich der Realitätrelevanz der theoretischen Größen können Gütebetrachtungen statistischer Inferenzverfahren nicht dienen, da sie die theoretischen Größen voraussetzen, um die es geht.

Modellbildung

Abstraktion: Zufallsvariable ordnet Merkmalsträgern Ausprägungen des Merkmals zu. Oft klassifiziert, um Aussagekräftig zu sein.

$$X_a : \Omega_a \longrightarrow \mathbb{X}_a$$

Relevant für die Fragestellung sind Anteile der Merkmalsausprägungen unter den Merkmalsträgeren: $\Longrightarrow P_a$

Generalisierung: Es werden nicht nur "tatsächliche" Merkmalsträger betrachtet, sondern "alle möglichen", ebenso Ausprägungen:

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{X}$$

Auch hier sind die Anteile der Merkmalsausprägungen relevant. Diese sind so direkt nicht gegeben (z.B. Überabzählbares Ω und $\mathbb{X}$).

Abstraktion: Übergang von Anteilen zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen: P bzw. $\mathcal{P}$.

Operationalisierung: Antalytisch gut handhabbare Verteilungen bzw. Verteilungsfamilen (Parameter etc.)

“Frequentistische” Inferenz

Eine von der/einer Zufallsvariablen X abhänige Funktion in die Potenzmenge von $\mathcal{P}$ wird als Inferenzmethode betrachtet. Formal:

$$M_X : \Omega \to \wp(\mathcal{P})$$

$$\omega \mapsto M_X(\omega) := M_{X(\omega)} \in \wp(\mathcal{P})$$

Die assoziierte Aussage lautet für $x = X(\omega)$:

$$P_0 \in M_x$$

Brückenprinzip: Bei einer Beobachtung $X(\omega) = x$ wird eine Menge $M_x \subset \mathcal{P}$ konkretisiert.

Mit dieser Konkretisierung wird die Aussage (das Ergebnis der Inferenz unter Verwendung der empirischen Daten sprachlich formuliert) “P_0, die ‘wahre’ Verteilung von X, liegt in M_x” bzw. “das Komplement von M_x enthält die ‘wahre’ Verteilung nicht”.

Diese Aussage kann wahr oder falsch sein.

Problem: Brückenprinzip

Statistische Kriteriologieen, die auf der Likelihood aufbauen, stellen hinsichtlich des Brückenprinzips und unter der obigen Interpretation kein Problem dar. Wie steht es aber um Kriteriologien, die “um den Erwartungswert kreisen”?.

Brückenprinzip bei Erwartungstreue (stetig) – ein Beispiel

Parametrisches Modell:

$$(\Omega, \Theta, \mathbb{X}, X)$$

Zu schätzen:

$$\theta = E_\theta(X)$$

Hierfür stehen n Beobachtungen $x_i = X(\omega_i), \{\omega_1, ..., \omega_n\} \subset \Omega$ zur Verfügung, $x_i \neq x_j, i \neq j$.

Interpretation: Jedes ω_i ist repräsentativ für eine Teilmenge $A_i \subset \Omega$.

Die A_i bilden eine Zerlegung $\langle A_1, ..., A_n \rangle$ von Ω.

Die zugeordneten x_i sind jeweils repräsentativ für "die Verteilung von X innerhalb der A_i", wenn θ der "wahre" Parameter ist.

Die ω_i und mithin die A_i sind "gleich relevant" oder "gleich wichtig", deswegen Abhängigkeit von θ: Übergang zu $A_i(\theta)$ mit

$$P_\theta(A_i(\theta)) = \frac{1}{n}$$

Sei $\mathcal{A}_\theta$ die von der Zerlegung $\langle A_1, ..., A_n \rangle$ erzeugte σ - Algebra

Dann gilt:

$$\theta = E_\theta(X) = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i(\theta)} X dP_\theta$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i(\theta)} E_\theta(X|\mathcal{A}_\theta) dP_\theta$$

Es gilt ferner:

$$E_\theta(X|\mathcal{A}_\theta) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\theta) I_{A_i(\theta)}$$

$x_i(\theta)$ ist konstant auf $A_i(\theta)$ und repräsentiert die Verteilung von X in $A_i(\theta)$.

Mit der obigen Interpretation der x_i gilt für die “wahre” Verteilung, θ_w

$$\theta_w = E_{\theta_w}(X) = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i(\theta_w)} X dP_\theta$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i(\theta)} E_\theta(X|\mathcal{A}_\theta) dP_\theta$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i P_{\theta_w}(A_i(\theta_w) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \bar{x}$$

Statistische Inferenz –
Inference to the Best (Idealized) Description